12. *Хуторской А.В.* Ключевые компетенции и образовательные стандарты: Доклад на отделении философии образования и теории педагогики РАО 23 апреля 2002 г. Центр «Эйдос» – www eidos.ru/news/compet/htm.
13. *Шадриков В.Д.* Новая модель специалиста: инновационная подготовка и компетентностный подход //Высшее образование сегодня. – 2004. – № 8. – с. 27–31.
14. Энциклопедический словарь. – М., 1995.
15. *Hutmacher Walo.* Key competencies for Europe // Report of the Symposium Berne, Switzerland 27-30 March, 1996. Council for Cultural Co-operation (CDCC) a Secondary Education for Europe/ Strasburg, 1997.
16. OCR, Recognizing achievement, Oxford Cambridge and RSA Examinations, p. 119, 2000.

С.К. Кыдыралиев,
к.ф.-м.н., доцент, и.о.профессора направления
«Естественные науки и информационные технологии»,
Американский университет в Центральной Азии

«За двумя зайцами», или Количественный анализ влияния различных налогов на модель CVP

В процессе обучения студентов часто возникает следующая ситуация: времени, выделенного на курс, мало, а объем материала, который желательно разобрать, довольно большой. В данной работе предлагается один из вариантов выхода из этой ситуации, который можно назвать «За двумя зайцами». Известно, чем часто это заканчивается, но все-таки будет сделана попытка дать понятие о линейных и квадратичных моделях исследования и, в то же время, будет изложена модель *CVP (Cost, Volume, Profit Model)* , включающая реакцию зоны прибыли на разные виды налогообложения.

Задача 1

Издержки подготовки к выпуску новой модели брюк составлют 24 000 сомов. Определите зону прибыли, зная, что средние переменные издержки производства пары брюк – 500 сомов, а продают их по цене 600 сомов.

Для того чтобы решить задачу, составим функцию выручки (*revenue*):

$R = 600q$ (q – объем продаж) (1)

и функцию издержек (*cost function*)

$C = 24000 + 500q$ (q – объем производства). (2)

Функции R и C являются линейными.

В общем виде линейная функция (*linear function*) записывается

$y = kx + b$. (3)

Характерный признак линейной функции – ее график на плоскости есть прямая линия.

Коэффициент k равен тангенсу угла между осью OX и прямой (3). Его обычно называют *угловым коэффициентом*, или, проще, *наклоном (slope)*. При $k > 0$ линейная функция является растущей, при $k < 0$ – убывающей, при $k = 0$ ее график есть горизонтальная линия. Наклон функции (1) есть цена (*price*) товара, а функции (2) – средние переменные издержки *(AVC – average variable cost)*. Если средние переменные издержки постоянны, то они совпадают с предельными издержками (*MC – marginal cost*).

Коэффициент b – *свободный член* – равен координате точки пересечения прямой (3) с осью OY. В частности, функция R проходит через начало координат, а функция C через точку (0; 24 000), определяемую значением постоянных издержек (*FC – fixed cost*).

Объем производства и продажи q, при котором функция прибыли

$Pf = R - C$ (*profit*) (4)

принимает положительное значение, называется *точкой прибыли*.

Множество точек прибыли образует *зону прибыли*. Отрицательным значениям функции отвечает *зона убытков*.

Точки, разделяющие зону прибыли и зону убытков, называются *точками перелома* (*break-even points*).

<u>Примечание.</u> В русскоязычной литературе термин *break-even point* часто переводят как *точка безубыточности* [1]. По нашему мнению, словосочетание *точка перелома* более точно отражает смысл.

Вернемся к задаче 1. Зная о том, что на границе зоны прибыли объем выручки совпадает с объемом издержек, найдем эту границу:

$600q = 24000 + 500q \Rightarrow q = 240$.

Соответствующий чертеж наглядно показывает,

R

C

24000

240

что фирма должна произвести и продать более 240 единиц товара для того, чтобы иметь прибыль. При этом, чем больше объем, тем больше прибыль.

<u>Задача 1LS</u>

Как изменится решение задачи 1, если необходимо дополнительно учесть паушальный налог величиной 5000 сомов.

Паушальный налог (lump sum tax) взимается в виде некоторой фиксированной денежной суммы. У нас он, обычно, рассматривается как плата за патент.

Необходимость выплаты паушального налога фирма воспринимает как дополнительные постоянные издержки.

В результате, меняется функция издержек:

$$C_L = 24000 + 500q + 5000.$$

Соответственно, точка перелома удовлетворяет уравнению

$$600q = 29000 + 500q$$

и равна 290.

R CL
C

29000
24000

q
240 290

(Как было сказано выше, изменение свободного члена линейного уравнения приводит к параллельному сдвигу прямой.)

Итак, паушальный налог, как и следовало ожидать, требует увеличения объема производства и продаж для достижения зоны прибыли.

<u>Задача 1E</u>

Как изменится решение задачи 1, если необходимо дополнительно учесть акцизный налог величиной 20 сомов.

Акцизный налог (excise tax) есть некоторая фиксированная денежная сумма, которая выплачивается с каждой проданной единицы товара или услуги. Введение или изменение акцизного налога приводит к соответствующему изменению предельных издержек *MC*.

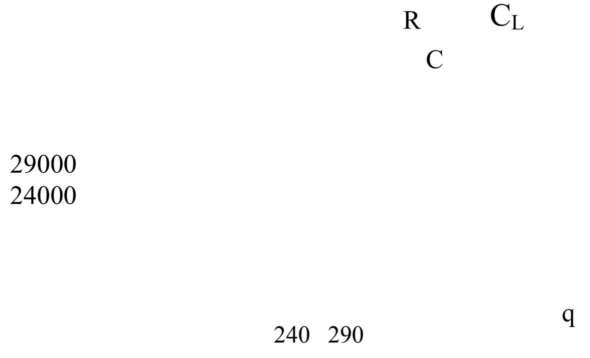
Если предельные (*marginal*) издержки *MC*, как в условиях задачи 1, постоянны, то они совпадают со средними переменными издержками.

Поэтому $AVC_E = 500 + 20.$

Тогда, $C_E = 24000 + 520q.$

И как следствие, точку перелома находим из уравнения

$600q = 24000 + 520q \Rightarrow q = 300.$



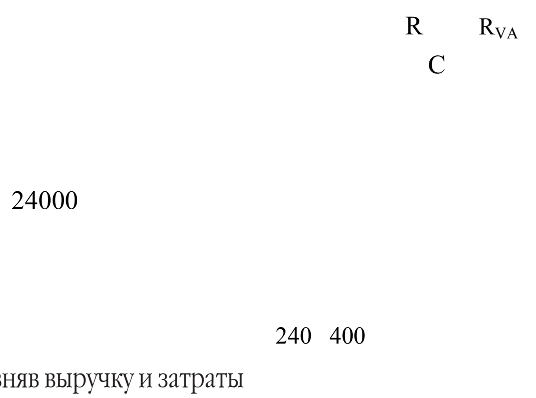
(Изменение коэффициента функции издержек изменило наклон соответствующей линии.)

Задача 1VA

Решим задачу 1, предположив, что дополнительно введен налог на добавленную стоимость 20%, а в затратах на единицу товара НДС составляет 60 сомов.

> Налог на добавленную стоимость НДС (*Value Added Tax – VAT*) предполагает, что продавец должен отдать государству часть добавленной стоимости – определенный процент от разности между ценой товара и стоимостью ресурсов, использованных при изготовлении товара и обложенных НДС на предыдущих этапах производства.

Если бы в условиях задачи предполагалось, что в стоимость ресурсов НДС не входит, то продавец за каждую проданную единицу товара получил бы $\frac{600}{1+0{,}20} = 500$ сомов, другими словами НДС составил бы 100 сомов. Но, так как в затратах на единицу товара НДС составляет 60 сомов, остается заплатить 40 сомов. Другими словами, за каждую проданную единицу товара будет получено $\frac{600}{1+0{,}20} + 60$ сомов.



Тогда, приравняв выручку и затраты

$$(\frac{600}{1+0{,}20}+60)q = 24000 + 500q,$$

получим, что зона прибыли есть интервал $(400; +\infty)$.

При решении задач вышеприведенного типа можно прийти к ложной мысли: «Чем больше производится, тем лучше». Поэтому, наряду с такими задачами, стоит рассматривать задачи, в которых цена зависит от количества товара.

Задача 2

Издержки подготовки к выпуску новой модели телевизора составляют $210 000. Определите зону прибыли, зная, что средние переменные издержки производства телевизора $400, а цена определяется функцией

$p = 1400 - q.$

Для того чтобы решить эту задачу, поступим так же, как и при решении задачи 1: составим функцию выручки

$$R = (1400 - q)q \qquad (5)$$

и функцию издержек

$$C = 210000 + 400q. \qquad (6)$$

Функция (5) есть частный случай квадратичной (*quadratic*) функции, которая в общем виде записывается

$$y = mx^2 + kx + b. \qquad (7)$$

График квадратичной функции на плоскости есть парабола, направленная ветвями вверх при $m > 0$: $\cup$; и ветвями вниз при $m < 0$: $\cap$.

При построении графика параболы полезно помнить о том, что коэффициент b – *свободный член* – равен координате точки пересечения параболы (7) с осью OY, а x_1 и x_2 – корни уравнения

$$mx^2 + kx + b = 0 \qquad (8)$$

определяют координаты точек пересечения параболы (7) с осью OX.

Значения x_1 и x_2 можно найти из формул

$$x_1 = \frac{-k-\sqrt{D}}{2m} \text{ и } x_1 = \frac{-k+\sqrt{D}}{2m}, \text{ где } D = k^2 - 4mb.$$

Если $D < 0$ и $m > 0$, то парабола расположена над горизонтальной осью: $\underline{\cup}$,

если $D < 0$ и $m < 0$ – под нею: $\overline{\cap}$.

Приравняв функции (5) и (6)

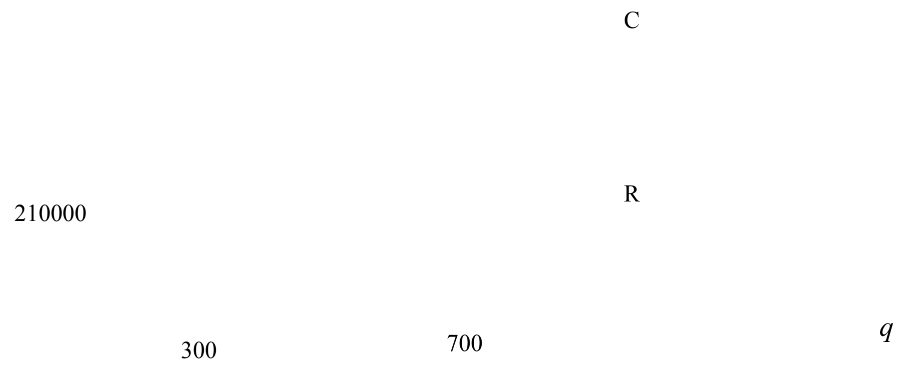
$(1400 - q)q = 210000 + 400q,$

придем к квадратному уравнению

$-q^2 + 1000q - 210000 = 0,$

которое имеет корни $q = 300$ и $q = 700$.

Из чертежа



видно, что, для того чтобы иметь прибыль, фирма должна произвести и продать более 300 единиц товара, но в то же время объем производства не дожен превышать 700 единиц. При этом, нижняя граница, в основном, показывает, сколько нужно продать, для того чтобы покрыть фиксированные затраты, а верхняя граница говорит о том, что, для того чтобы продать товар в количествах, превышающих это число, придется назначать слишком низкую цену.

Задача 2Pf

Как изменится решение задачи 2, если необходимо дополнительно учесть налог на прибыль 20 %.

Так как величина посленалоговой прибыли равна $Pf_1 = (1 - 0{,}2)Pf$, а уравнение, определяющее границы зоны прибыли $(1 - 0{,}2)Pf = 0$, эквивалентно уравнению $Pf = 0$, решение задачи 2Pf совпадает с решением задачи 2. Меняется только величина посленалоговой прибыли.

Налог с прибыли, теоретически, не влияет на объем рынка. Отличие теории от практики обуславливается тем, что, к сожалению, налог с прибыли взимается не с экономической, а бухгалтерской прибыли.

Задача 3

Издержки подготовки к выпуску и продаже нового вида товара составляют \$5000. Определите зону прибыли, зная, что средние переменные издержки для первых 128 единиц равны \$10, для последующих – \$12,5, а цена \$60.

Составим функцию выручки $R = 60q$ и функцию полных издержек для первых 128 единиц товара $C = 5000 + 10q$.

Из уравнения $60q = 5000 + 10q$ получим, что решение задачи есть область $(100; +\infty)$.

Задача 3LS

Как изменится решение задачи 3, если необходимо дополнительно учесть паушальный налог величиной \$2920.

Введение налога меняет функцию издержек:

$$C_L = 5000 + 10q + 2920.$$

Тогда решением уравнения

$$60q = 7920 + 10q$$

является $q = 158{,}4$. Но это число не определяет зону прибыли, так как функция C_L определяет издержки только для 128 первых единиц товара, а у нас получилось 158,4. Для того чтобы получить правильный ответ, построим функцию издержек для остальных значений q.

Так как полные издержки 128 единиц товара равны

$7920 + 10\cdot 128 = 9200$,

а средние переменные издержки для последующих единиц товара равны 12,5, соответствующую функцию можно определить подставив координаты точки (128; 9200) в равенство $C_{L1} = 12{,}5q + b$:

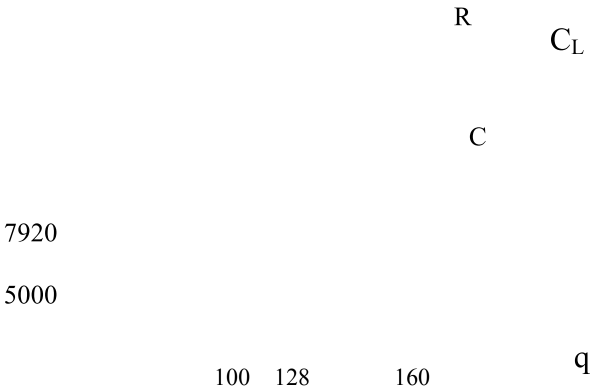
$9200 = 12{,}5\cdot 128 + b \Rightarrow b = 7600$

Итак, полные издержки производства и продажи после 128 первых единиц будут определяться функцией $C_{L1} = 12{,}5q + 7600$.

Отсюда, приравняв функции выручки и издержек,

$60q = 12{,}5q + 7600$,

и решив полученное уравнение, получим, что для получения прибыли нужно произвести и продать более 160 единиц товара.



<u>Задача 3Q</u>

Как изменится решение задачи 3, если цена будет определяться функцией

$p = 80 - 0{,}2q$.

Приравняв функцию выручки и функцию издержек C, получим квадратное уравнение

$(80 - 0{,}2q)q = 5000 + 10q \Rightarrow -0{,}2q^2 + 70q - 5000 = 0$,

имеющее корни $q_1 = 100$ и $q_2 = 250$.

Так как $q_2 > 128$, оно не принадлежит области определения функции C.

Поэтому, для того чтобы найти вторую границу зоны прибыли, необходимо выписать функцию, определяющую издержки при $q > 128$.

Так как $C(128) = 5000 + 10\cdot 128 = 6280$, а наклон, определяемый средними переменными издержками равен 12,5, то прямая $C_1 = 12{,}5q + b$ проходит через точку (128; 6280).

Тогда $6280 = 12{,}5\cdot 128 + b \Rightarrow b = 4680$.

Теперь, приравняв функцию выручки и функцию издержек,

$(80 - 0{,}2q)q = 4680 + 12{,}5q$,
и решив полученное квадратное уравнение
$-0{,}2q^2 + 67{,}5q - 4680 = 0 \Rightarrow q_1 = 97{,}5$ и $q_2 = 240$,
найдем верхнюю границу зоны прибыли $q = 240$.

C_1

R

C

5000

100 128 240

Литература

1. *Друри К.* Управленческий и производственный учет. – М.: ЮНИТИ, 2003.

Э. Т. Мусуралиева,
к.ф.-м.н., ассоциированный профессор направления «Естественные науки и информационные технологии», Американский университет в Центральной Азии

О математике для социальных наук

В настоящее время роль математики в естествознании, гуманитарных и социальных науках огромна. Среди социальных наук по числу применений математических методов первенство, несомненно, принадлежит экономической науке. Этому способствовало то, что все основные понятия и предметы, которые изучают экономисты, выражаются количественно и «изучение способов, которыми человечество решает проблему ограниченности ресурсов» (6), также возможно количественными методами. Политология и психология по числу математических моделей уступают только экономике. Разработка стратегии экономического развития, использование моделей социального поведения, принятие политических решений – все это сейчас совершенно невозможно без систематического применения математики.