Section 2. Mathematics, Economics

Э. Р. Атаманов,
кандидат физико-математических наук,
доцент, ассоциированный профессор направления
"Естественные науки и информационные технологии"

Трехточечная задача для псевдопараболического уравнения

Ряд физических проблем сводится к изучению следующего уравнения [1, 2]

$(I - \Delta)\, u_t(x, t) = \Delta u(x, t),$

где Δ – оператор Лапласа, а I – тождественный оператор Будем рассматривать одномерный аналог этого уравнения, и нас будет интересовать единственность и оценка устойчивости решения следующей трехточечной задачи

Пусть $u\ (x, t)$ определена в полуполосе

$$D = \{0 < x < \pi,\ 0 \le t < \infty\}$$

$$u_t(x, t) = u_{xxt}(x, t) + u_{xx}(x, t), \qquad (1)$$

$$u\ (0, t) = u\ (\pi, t) \qquad (2)$$

$$u(x^*, t) = f(t) \qquad (3)$$

где x^* – заданное число промежутка $[0, \pi]$, f(t) – заданная функция Наша задача является внутренней [3] и заключается в восстановлении функции $u\ (x, t)$ на всей полуполосе D по данным (2), (3) и может возникать в задачах, связанных с зондированием Аналогичные задачи были рассмотрены в монографиях [4, 5], в отличие от них в данной работе мы рассматриваем и локальную задачу

ОПРЕДЕЛЕНИЕ Будем говорить, что функция $u\ (x, t)$ принадлежит классу $U\ (M)$, если u, u_γ непрерывны и в D

$|u|, |u_\gamma| \le M$,

где $\gamma = x, t, xx, xt, xxt$.

ТЕОРЕМА 1. Решение задачи (1) – (3) для x^*/π иррациональных единственно в классе $U\ (M)$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Решение уравнения (1) с условиями (2) в классе *U (M)* можно записать в виде

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{-\frac{k^2 t}{k^2+1}} \sin kx, \tag{4}$$

где a_k – коэффициенты Фурье функции $u\ (x,\ 0)$.

Из (3), (4) имеем

$$f(t)=\sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{-\frac{k^2 t}{k^2+1}} \sin kx^{*}. \tag{5}$$

Очевидно, что так как нас интересует единственность решения задачи, то x^{*}/π должно быть иррациональным. Применим к (5) преобразование Лапласа

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin kx^{*} \int_0^{\infty} e^{-\left(p+\frac{k^2}{k^2+1}\right)t}\, dt = F(p), \tag{6}$$

где $F\ (p)$ – образ функции $f\ (t)$ после применения преобразования.

Проинтегрировав обе части последнего равенства по окружностям

$$\Gamma_n=\left\{p:\left|p-p_n\right|=\frac{1}{2}\left[\frac{(n+1)^2}{(n+1)^2+1}-\frac{n^2}{(n+1)^2+1}\right]\right\} \tag{7}$$

с центрами в точках $p_n=-n\left(1-n^2\right)^{-1}$, получим

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin kx^{*} \int_{\Gamma_n}\left[p+k^2\left(k^2+1\right)^{-1}\right]^{-1} dp=\int_{\Gamma_n} F(p)\, dp.$$

Из последнего, согласно интегральной формуле Коши, получаем

$$2\pi i a_n \sin nx^{*}=\int_{\Gamma_n} F(p)\, dp. \tag{8}$$

Так как x^{*}/π иррационально, то коэффициенты a_n определяются однозначно, и тем самым вопрос о единственности решен.

Рассмотрим теперь вопрос о получении оценки условной устойчивости. Оценку устойчивости решения удается построить для алгебраических $\frac{x^{*}}{\pi}$ – алгебраическое число степени m. Известно [7], что для всякого алгебраического числа $\frac{x^{*}}{\pi}$ степени m, какова бы ни была рациональное $\frac{p}{q}$ дробь, имеет место равенство

$$\left|\frac{x*}{\pi}-\frac{p}{q}\right| \geq \frac{\lambda\left(\frac{x*}{\pi}\right)}{q^m}$$

ТЕОРЕМА 2. Пусть $u(x,t) \in U(M)$ и является решением задачи (1.0.1), (2.1.1), (2.1.2). Тогда если

$$\left|f(t)\right| < \varepsilon \tag{9}$$

и $\frac{x*}{\pi}$ такое, что

$$\left|\frac{x^*}{\pi}-\frac{p}{q}\right| \geq \frac{\lambda(x^*/\pi)}{q^m},$$

то

$$\left|u(x,t)\right| \leq C\varepsilon^{\frac{2}{m+2}\omega_0}(2MC_1)^{\frac{2}{m+2}(1-\omega_0)}, \tag{10}$$

где $0 < \omega_0 < 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $u(x,t) \in U(M)$, то

$$\left|a_n\right| \leq 2Mn^{-3}. \tag{11}$$

Из (9) следует

$$\left|F(p)\right| \leq \int_0^\infty e^{\operatorname{Re} pt}\varepsilon\, dt = \frac{\varepsilon}{\operatorname{Re} p}, \quad \operatorname{Re} p \geq p_0 > 0. \tag{12}$$

Обозначим γ_n через следующую окружность

$$\gamma_n = \left\{p : \left|p+\frac{n^2}{1+n^2}\right| = \frac{1}{4}\left[\frac{(n+1)^2}{(n+1)^2+1}-\frac{n^2}{n^2+1}\right]\right\}.$$

Оценим $F(p)$ на γ_n. При этом воспользуемся условием (11)

$$\left|F(p)\right| \leq \sum_{k=1}^\infty \left|a_k \sin kx^*\right| \cdot \frac{1}{p-p_k} \leq \sum_{k=1}^\infty \frac{\left|a_k\right|}{\left|p-p_k\right|} \leq$$

$$\leq \frac{\left|a_1\right|}{\left|p_1-p_{n-1}\right|}+\frac{\left|a_2\right|}{\left|p_2-p_{n-2}\right|}+\cdots+\frac{\left|a_{n-1}\right|}{\frac{3}{4}\left|p_{n-1}-p_n\right|}+\frac{\left|a_n\right|}{\frac{1}{4}\left|p_n-p_{n+1}\right|}+$$

$$+\frac{\left|a_{n+1}\right|}{\frac{3}{4}\left|p_{n+1}-p_n\right|}+\frac{\left|a_{n+2}\right|}{\left|p_{n+2}-p_{n-1}\right|}+\cdots \leq$$

$$\le 2Mn^2\left\{\frac{1}{n^2-1^2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n^2-2^2}+\cdots+\frac{1}{n-1}\cdot\frac{1}{n^2-(n-1)^2}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{(n+1)^2-n^2}+\frac{1}{n+k}\cdot\frac{1}{(n+k)^2-n^2}+\cdots\right\}\le$$

$$\le 2Mn^2\left\{\frac{1}{n^2-(n-1)^2}+\frac{1}{n}\left(\frac{1}{1^2+2n}+\cdots+\frac{1}{k^2+2kn}+\cdots\right)\right\}\le$$

$$\le 2MCn.$$

Итак, на γ_n для функции $F(p)$ получили следующую оценку

$$|F(p)|\le 2MCn. \tag{13}$$

Для того, чтобы получить оценку функции $F(p)$ в левой полуплоскости через ε, выполним следующие построения.

Рассмотрим область Q_n, которая заключена между окружностью S_n с центром в начале координат и радиусом

$$R_n=\frac{3}{4}\cdot\frac{(n+1)^2}{(n+1)^2+1}+\frac{1}{4}\cdot\frac{n^2}{n^2+1}$$

и окружностью B_n с радиусом

$$r_n=\frac{1}{2}\cdot\frac{(n+1)^2}{(n+1)^2+1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{n^2}{n^2+1}.$$

Центр последней окружности смещен на действительной оси так, что окружности S_n, B_n касаются в точке $\xi=(R_n,0)$.

Далее, проведем дугу, которая пересекает полученную область Q_n в первом квадранте и при конформном отображении вида $\dfrac{1}{P-R_n}$ переводится в отрезок прямой, параллельной действительной оси.

Обозначим через D_n область, которая получается из Q_n отбрасыванием той ее части, которая расположена в первом квадранте между секущей дугой и точкой касания. В полученной области D_n функция $F(p)$ на секущей дуге E_n имеет оценку (12), а на остальной границе имеет предельную оценку (13).

Согласно теореме о двух константах [6] в области D_n справедлива оценка

$$|F(p)|\le\left(\frac{\varepsilon}{p_0}\right)^{\omega(P_n,E_n,D_n)}(2MCn)^{1-\omega(P_n,E_n,D_n)}, \tag{14}$$

где $\omega\left(P_n,E_n,D_n\right)$ – гармоническая мера множества E_n относительно области D_n в точке P_n.

Односвязную область D_n конформным преобразованием

$$W = \frac{-i}{P_n - R_n}$$

можно перевести в следующую полуполосу:

$$\frac{1}{R_n} < |\mathrm{Im}\, W| < \frac{1}{2r_n - R_n}, \quad \mathrm{Re}\, W < b, \tag{15}$$

где постоянная $b>0$.

Далее, проведем следующее конформное преобразование

$$\begin{aligned} z_n = \varphi(P_n, n) &= \frac{\pi}{2} \cdot \frac{R_n(2r_n - R_n)}{2(R_n - r_n)} \left\{ W - i\left[\frac{1}{R_n} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2r_n - R_n} - \frac{1}{R_n} \right) \right] \right\} = \\ &= i \cdot \frac{\pi}{4} \cdot \frac{R_n(2r_n - R_n) + r_n(P_n - R_n)}{(R_n - r_n)(R_n - P_n)} \end{aligned} \tag{16}$$

Преобразование (16) переводит полуполосу (15) в полуполосу P, которая определяется соотношением:

$$|J_m\, z| \le \frac{\pi}{2}, \quad \mathrm{Re}\, z \le b'. \tag{17}$$

Подставляя в (16) значения R_n и r_n, можно убедиться, что

$$\begin{aligned} z_n &= \varphi(P_n, n) = \\ &= \frac{a_0 n^{10} + a_1 n^9 + \cdots + a_{10} + P_n(a_0' n^{10} + a_1' n^9 + \cdots + a_{10}')}{b_0 n^{10} + b_1 n^9 + \cdots + b_{10} + P_n(b_0' n^{10} + b_1' n^9 + \cdots + b_{10}')} = \\ &= \frac{(a_0 - a_0')n^{10} + \cdots}{(b_0 - b_0')n^{10} + \cdots} = \frac{(a_0 - a_0')}{(b_0 - b_0')} + O\left(\frac{1}{n}\right) = \tilde{z}_n + O\left(\frac{1}{n}\right) \end{aligned} \tag{18}$$

где $\tilde{z}_n$ – постоянные, причем $J_m\, \tilde{z} = 0, \quad \mathrm{Re}\, \tilde{z} \le 0$.

Известно, что если функция $W(z)$ конформно отображает область D на D', а множество E переходит при этом отображении в множество E', то для гармонической меры справедливо равенство

$$\omega(z, E, D) = \omega(W(z), E', D').$$

Используя это свойство гармонической меры, из (14) имеем

$$|F(p)| \le \left(\frac{\varepsilon}{p_0} \right)^{\omega(z_n, H, P)} (2MCn)^{1-\omega(z_n, H, P)} \tag{19}$$

где $\omega\left(z_n, H, P\right)$ – гармоническая мера торца H полуполосы (17) в точке z_n.

Как известно [6],

$$\omega\left(z_n, H, P\right) = \frac{2}{\pi} \operatorname{Im} \ln \frac{1 + ie^{z_n - b'}}{1 - ie^{z_n - b'}} \tag{20}$$

Покажем, что $\omega\left(z_n, H, P\right)$ оценивается снизу положительным числом, не зависящим от n

Отметим, что z_n – числа, расположенные на $Re\, z$ Выражение под знаком логарифма в (20) преобразуем к следующем к виду

$$\frac{1 - e^{2(z_n - b')} + 2ie^{z_n - b'}}{1 + e^{2(z_n - b')}} = \frac{1 - e^{2(z_n - b')}}{1 + e^{2(z_n - b')}} + i \frac{+2e^{z_n - b'}}{1 + e^{2(z_n - b')}}$$

Для аргумента ψ последнего комплексного числа имеем

$$tg\psi = \frac{e^{z_n - b'}}{1 - e^{2(z_n - b')}} \qquad \psi = arctg \frac{e^{z_n - b'}}{1 - e^{2(z_n - b')}}$$

В этом случае

$$\omega(z_n, H, P) = \frac{2}{\pi} arctg \frac{2e^{z_n - b'}}{1 - e^{2(z_n - b')}} = \frac{2}{\pi} arctg \frac{2}{e^{-(z_n - b')} - e^{(z_n - b')}} =$$

$$= \frac{2}{\pi} arctg \frac{2}{e^{(b' - z_n)} - e^{-(b' - z_n)}} = \frac{1}{\pi} arctg\, sh^{-1}(b' - z_n)$$

Из (18) следует существование такого постоянного d, что выполняется следующее неравенство

$$sh^{-1}(b' - z_n) = \frac{e^{b - z_n} - e^{-b' - z_n}}{2} < e^{b - z_n} < e^{b + d}$$

Отсюда имеем

$$sh^{-1}(b' - z_n) > e^{-(b + d)}$$

Наконец, в силу монотонности арктангенса, получаем

$$\omega(z_n, H, P) > \frac{2}{\pi} arctg\, e^{-(b + d)}$$

Теперь оценку (14) можно переписать в виде

$$|F(p)| \le \left(\frac{\varepsilon}{p_0}\right)^{\omega(z_n\ H\ P)} (2MCn)^{1 - \omega(z_n\ H\ P)} \le$$

$$\le n\left(\frac{\varepsilon}{p_0}\right)^{\omega_0} (2MCn)^{1 - \omega_0} = n\varepsilon_0 \tag{21}$$

Из (8), (21) получаем

$$\left|a_n \sin nx^*\right| \le \frac{\Gamma_n n\varepsilon_0}{2\pi}.$$

Отметим, что

$$|\Gamma_n| = 2\pi \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{(n^2+1)(n^2+2n+1) - n^2 - n^2(n^2+2n+1)}{(n^2+1)(n^2+2n+1)} =$$

$$= \frac{(2n+1)\pi}{(n^2+1)(n^2+2n+2)} \le \pi \cdot \frac{\varepsilon}{n^3}.$$

Рассмотрим частичную сумму

$$\sum_{n=1}^{N} \left|a_n \sin nx^*\right| \le \frac{1}{2\pi} \sum_{n=1}^{N} |\Gamma_n| n\varepsilon_0 \le \frac{1}{2\pi} \sum_{n=1}^{N} n^{-3} n\varepsilon_0 \le C_2 \varepsilon_0.$$

Далее

$$\sum_{n=1}^{N} |a_n|^2 \left|\sin nx^*\right|^2 \le \left(\sum_{n=1}^{N} \left|a_n \sin nx^*\right| \right)^2 \le C_1^2 \varepsilon_0^2. \tag{22}$$

Из условия Теоремы 2 имеем, что какова бы ни была рациональная дробь $\frac{p}{q}$, для точки x^*/π имеем

$$\left| q\frac{x^*}{\pi} - p \right| \ge \frac{\lambda\left(x^*/\pi\right)}{q^{m-1}}. \tag{23}$$

Отметим справедливость следующего соотношения

$$\sin kx^* = \sin \frac{kx^*}{\pi}\pi = \sin\left\{ \frac{kx^*}{\pi}\pi - \left[\frac{kx^*}{\pi}\right]\pi + \left[\frac{kx^*}{\pi}\right]\pi \right\} =$$

$$= \sin\left\{ \frac{kx^*}{\pi} - \left[\frac{kx^*}{\pi}\right] \right\}\pi.$$

В силу последнего соотношения и с учетом (23), получаем

$$\left|\sin kx^*\right| = \sin\left\{ \frac{kx^*}{\pi} - \left[\frac{kx^*}{\pi}\right] \right\}\pi > \sin\frac{\pi}{k^{m-1}} \ge \frac{1}{N^m}, \quad k = 1, 2, ..., \mathrm{N}.$$

Отсюда имеем

$$\left|\sin kx^*\right| \ge \frac{1}{N^{2m}}. \tag{24}$$

Тогда из (2.1.22), (2.1.23) получаем

$$\sum_{n=1}^{N} |a_n|^2 \le \frac{N^{2m} C_2 \varepsilon_0^2}{4\pi^2\lambda^2\left(x^*/\pi\right)}. \tag{25}$$

Используя априорную оценку (11), нетрудно получить

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n| \le 2M \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \le 2M \int_{N+1}^{\infty} \frac{dx}{x^3} \le M\, N^{-2}. \tag{26}$$

Теперь на основании неравенства Гельдера и, учитывая (25), (26), получим

$$|u(x,t)| \le \left|\sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin kx^*\right| \le \sum_{k=1}^{N} |a_k| + \sum_{k=N+1}^{\infty} |a_k| \le$$

$$\le \left(\sum_{k=1}^{N} |a_k|\right)^{1/2} + \sum_{k=N+1}^{\infty} |a_k| \le \frac{N^m C_2 \varepsilon_0}{2\pi\lambda\left(x^*/\pi\right)} + 2M\, N^{-2}. \tag{27}$$

Найдем значение $\bar{N}$, которое реализует минимум правой части (27)

$$\left[\frac{N^m C_2 \varepsilon_0}{2\pi\lambda\left(x^*/\pi\right)} + 3M\, N^{-2}\right] = \frac{mN^{m-1} C_2 \varepsilon_0}{2\lambda\left(x^*/\pi\right)\pi} - \frac{6M}{N+3} = 0$$

$$\bar{N} = \left[\frac{6M\pi\lambda\left(x^*/\pi\right)}{mC_2\varepsilon_0}\right]^{-\frac{2}{m+2}}.$$

Подставляя найденное значение $\bar{N}$ в (27), с учетом (21) получим следующую оценку

$$|u(x,t)| \le C\varepsilon^{\frac{2}{m+2}\omega_0} \left(2MC_1\right)^{\frac{2}{m+2}\left(1-\omega_0\right)}.$$

Теорема доказана.

Теперь предположим, что область

$$D = \{0 \le x \le \pi, \quad 0 \le t \le T\}.$$

В этом случае Теорема 1 справедлива и доказывается следующим образом. Поскольку $u(x,t) \in U(M)$, ряд (15) сходится при $t > 0$. Более того, так как члены ряда – аналитические функции t и ряд равномерно сходятся в каждой точке полуплоскости $\mathrm{Re}\, t \ge \delta > 0$, то функция $f(t)$ допускает аналитическое продолжение в полуплоскость $\mathrm{Re}\, t \ge 0$ с помощью равенства

$$f(z)=\sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin kx^* e^{-\frac{k^2}{k^2+1}z}, \quad z=t+is.$$

Применим к обеим частям этого равенства преобразование Лапласа по s при фиксированной точке t_0:

$$F(p)=\int_0^{\infty} e^{-ps} f(t_0+is)\,ds=$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin kx^* e^{-\frac{k^2 t}{k^2+1}}\cdot\int_0^{\infty} e^{-\left(p+i\frac{k^2}{k^2+1}\right)s}\,ds= \tag{28}$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin kx^* e^{-\frac{k^2 t_0}{k^2+1}}\left(p+i\frac{k^2}{k^2+1}\right)^{-1}.$$

Проинтегрируем обе части (28) по окружностям

$$\Gamma_n=\left\{p:|p-p_n|=\frac{1}{2}\left[\frac{(n+1)^2}{(n+1)^2+1}-\frac{n^2}{n^2+1}\right]\right\}$$

с центрами в точках $p_n=-in^2(n^2+1)^{-1}$.

Тогда получим

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin kx^* e^{-\frac{k^2 t_0}{k^2+1}}\int_{\Gamma_n}\frac{dp}{p+p_k}=\int_{\Gamma_n}F(p)\,dp.$$

Согласно интегральной формуле Коши, из последнего получаем

$$2\pi i a_n \sin nx^*\cdot e^{-\frac{n^2 t_0}{n^2+1}}=\int_{\Gamma_n}F(p)\,dp.$$

Отсюда, в силу иррациональности x^*/π, искомые коэффициенты a_k находятся единственным образом. Теорема 1 и в этом случае имеет место.

ОЦЕНКА УСТОЙЧИВОСТИ.

ТЕОРЕМА 2.1.3. Пусть $u\,(x,\,t)$ является решением задачи (1) – (3) в области $\{0\le x\le\pi,\ 0\le t\le T\}$ и принадлежит классу $U\,(M)$. Тогда, если

$$|f(t)|\le\varepsilon \tag{29}$$

и x^*/π – алгебраическое число степени m, то

$$|u(x,t)|\le C\varepsilon_1^{\frac{2}{m+2}\omega_0}(2MC_2)^{\frac{2}{m+2}(1-\omega_0)},$$

где

$$0<\omega_0<1, \quad \varepsilon_1=\varepsilon_0^{\omega(P,E_1,D_1)}(2MC_1)^{1-\omega(P,E_1,D_1)},$$

$$\varepsilon_0=e^{\left(-\ln\frac{1}{\varepsilon}\right)C_1}, \quad \omega(P,E_1,D_1)=1-\frac{2}{\pi}\operatorname{Im}\ln p.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вначале получим оценку функции $f(t)$ при $0<t<\infty$. Вновь рассмотрим функцию $f(z)$. В круге D_0 комплексной плоскости z с центром $\left(T/2,0\right)$ и радиусом $T/2$, согласно теореме о двух константах [6], имеем

$$|f(z)|\le C\varepsilon^{\alpha}, \tag{30}$$

где $0<\alpha<1$, C – постоянная (здесь и дальше несущественные постоянные будем обозначать C).

Пусть Ω – внутренность правой ветви гиперболы $t^2\left(T/2\right)^{-2}-s^2b^{-2}=1$, где $b>0$ – некоторая постоянная. Легко видеть, что на этой гиперболе функция $f(z)$ ограниченная, т.е.

$$|f(z)|\le M.$$

Тогда в любой точке $(t,0)$ имеем

$$|f(z)|\le\left(C\varepsilon^{\alpha}\right)^{\omega(t,E,\Omega)}M_1^{1-\omega(t,E,\Omega)}, \tag{31}$$

где $\omega(t,E,\Omega)$ – гармоническая мера дуги E правой ветви гиперболы (расположенной в D_0) в точке $(t,0)$ относительно Ω.

Известно [6], что следующее конформное отображение

$$p=\varphi(t)=\sqrt{2}\,ch\left\{\frac{\pi}{2\theta}\,arch\frac{t}{C_0}\right\}, \tag{32}$$

где $C_0=\sqrt{\left(T/2\right)^2+b^2}$, $\theta=\arcsin\left(T/2C_0\right)$, переводит внутренность правой ветви гиперболы в правую полуплоскость D'.

Из (32) при больших t имеем

$$p=\sqrt{2}\,ch\left\{\frac{\pi}{2\theta}\,arch\frac{t}{C_0}\right\}=$$

$$=\sqrt{2}\,\frac{\exp\left(-\frac{\pi}{10}\,arch\frac{t}{C_0}\right)+\exp\left(-\frac{\pi}{2\theta}\,arch\frac{t}{C_0}\right)}{2}\le \tag{33}$$

$$\le \sqrt{2}\exp\left(\frac{\pi}{2\theta} arch\frac{t}{C_0}\right) = \sqrt{2}\exp\left[\frac{\pi}{2\theta}\ln\left(\frac{t}{C_0}+\sqrt{\frac{t^2}{C_0^2}-1}\right)\right] =$$

$$= \sqrt{2}\left(\frac{t}{C_0}+\sqrt{\frac{t^2}{C_0^2}-1}\right)^{C_1} \le Ct^{C_1},$$

где $0 < C_1 < 1$.

Из инвариантности гармонической меры при конформном отображении следует

$$\omega(t,E,\Omega) = \omega_1[\varphi(t), E', D'],$$

где $E' = \varphi(E)$, $D' = \varphi(\Omega)$, $\omega_1[P,E',D']$ – гармоническая мера отрезка E' (в него переходит дуга E) в точке р относительно D'. Тогда (31) принимает вид

$$|f(z)| \le (C\varepsilon^{\alpha})^{\omega_1(P\ F\ D)} M_1^{1-\omega_1(P\ F\ D)}. \tag{34}$$

С учетом (33) оценим $\omega_1(P,E',D')$ снизу, для чего используем интеграл Пуассона для полуплоскости

$$\omega_1(P,E',D') = \frac{P}{\pi}\int_{s_1}^{s_2}\frac{ds}{s^2+p^2} = \frac{1}{\pi}\int_{s_1}^{s_2}\frac{d\left(\frac{s}{p}\right)}{1+\left(\frac{s}{p}\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{\pi} arctg\left.\frac{s}{p}\right|_{s_1}^{s_2} = \frac{1}{\pi} arctg\frac{s_2}{p} - \frac{1}{\pi} arctg\frac{s_1}{p} =$$

$$= \frac{1}{\pi} arctg\frac{(s_2-s_1)p^{-1}}{1+s_1s_2p^{-2}} = \frac{1}{\pi} arctg\frac{p(s_2-s_1)}{p+s_1s_2} > \frac{c}{p} \ge \frac{C}{t^{C_1}}.$$

Итак, из (34) с учетом последнего неравенства получим

$$|f(t)| \le C\varepsilon^{\left(\frac{1}{t}\right)^{C_1}}.$$

Из самого вида функции имеем

$$|f(t)| \le e^{-t}$$

Тогда

$$|f(t)| \le \min\left(e^{-t}, \varepsilon^{\left(\frac{1}{t}\right)^{C_1}}\right). \tag{35}$$

Выберем t из условия

$$e^{-t} = \varepsilon^{\left(\frac{1}{t}\right)^{C_1}}.$$

Отсюда $-t=\left(\frac{1}{t}\right)^{C_1}\ln\varepsilon$ или $t=\left(\ln\frac{1}{\varepsilon}\right)^{C_3}$, где $C_3=(C_1+1)^{-1}$.

Наконец, имеем

$$|f(t)|=\exp\left[-\left(\ln\frac{1}{\varepsilon}\right)^{C_3}\right]=\varepsilon_0,\quad 0<t<\infty. \tag{36}$$

Теперь, воспользовавшись (36), получим

$$|F(p)|=\left|\int_0^\infty e^{-ps}f(t_0+is)ds\right|\le\int_0^\infty\exp(-\operatorname{Re}ps)\varepsilon_0\,ds=\varepsilon_0\operatorname{Re}p.$$

Отметим, что исходя из вида функции *F (p)* и с учетом того, что $|a_n|\le 2Mn^{-3}$, для нее в верхней полуплоскости, имеем следующую оценку:

$$|F(p)|\le\left|\sum_{k=1}^\infty a_k\sin kx^*\cdot\exp\left(-\frac{k^2t_0}{1+k^2}\right)\left(p+i\frac{k^2}{1+k^2}\right)\right|\le$$

$$\le\sum_{k=1}^\infty|a_k|\left|\frac{k^2}{1+k^2}\right|^{-1}\le 2M\sum_{k=1}^\infty\left|\frac{1}{k^5}+\frac{1}{k^3}\right|\le 2MC_1'.$$

По теореме о двух константах для *F (p)* при $\operatorname{Im}p\ge 0$ справедливо неравенство

$$|F(p)|\le\left(\frac{\varepsilon_0}{\operatorname{Re}p}\right)^{\omega(P,E_1,D_2)}(2MC_1')^{1-\omega(P,E_1,D_2)},$$

где $\omega(P,E_1,D_2)$ – гармоническая мера положительной полуоси E_1 в точке p относительно верхней полуплоскости D_2. Согласно принципа расширения областей, можем оценить гармоническую меру $\omega(P,E_1,D_2)$

снизу, а именно,

$$\omega(P,E_1,D_2)\ge\omega(P,E_1,D_1),$$

где $\omega(P,E_1,D_1)$ – гармоническая мера E_1 в точке p первого квадранта и она равна [6]

$$\omega(P,E_1,D_1)=1-\frac{2}{\pi}\operatorname{Im}\ln p.$$

Поэтому для всех p, у которых $\operatorname{Im}p>0$, имеем

$$|F(p)|\le\left(\frac{\varepsilon_0}{\operatorname{Re}p}\right)^{\omega(P,F_1,D_1)}(2MC_1')^{1-\omega(P,E_1,D_1)}=\varepsilon_1,$$

Обозначим через γ_n следующую окружность:

$$\gamma_n = \left\{ p : |p - p_n| = \frac{1}{4}\left[\frac{(n+1)^2}{(n+1)^2+1} - \frac{n^2}{n^2+1}\right]\right\},$$

где $p_n = -i\dfrac{n^2}{n^2+1}$.

Так же, как и выше в этом разделе, можно показать, что $F(p)$ на γ_n имеет предельную оценку

$$|F(p)| \le 2MC_2.$$

Таким образом, задача сведена к случаю, когда $0 \le t < \infty$.

Таким образом, Теорема 3 доказана.

Литература

1. Chen P.J., Gurtin M.E, Wurlams W.O. A no te on nonsimple heat conduction. // Z. Angew. Phys. 1968, 19, p. 969–970.
2. Chen P.J., Gurtin M.E, On a theory of heat conduction involing two tempe raptures. Z. Angew. Math. Phys. 1968, 19, p. 617–637.
3. Лаврентьев М.М. О внутренних задачах для дифференциальных уравнений // Методы решения некорректных задач и их приложения. – Новосибирск, 1982. – С. 68–72.
4. Asanov A. and Atamanov E.R. Nonolassical and Inverse Problems for Psendoparabolic Equations. (VSP, Utrecht – Tokyo, 1997) 152 p.
5. Shishatskii S.P., Asanov A., Atamanov E.R. Uniqueness Problems for Dejenerating Equations and Nonelassical Problems (VSP, Utreht. Tokyo, 2001), 178 p.
6. Евграфов М.А. Аналитические функции. – М.: "Наука", 1968.
7. Ленг С. Алгебраические числа. – М.: "Мир", 1966.

А.Т. Баканова,

магистр экономики,

преподаватель направления "Экономика"

Спрос на деньги в Кыргызской Республике

Введение

Среди основных задач центральных банков в рамках осуществления денежно-кредитной политики выделяются следующие две задачи: недопущение высоких темпов инфляции и обеспечение роста производства. Инструментом одновременного решения этих (иногда противоречащих друг другу) задач является поддержание денежного равновесия в экономике, т.е. увязка предложения денег со спросом на них на уровне, соответствующем целевым показателям по инфляции и экономическому росту.