4 Bolharyn, I , and K. Banaian (1998), "Modeling Money Demand in the Ukrainian Economy," Russian and East European Finance and Trade 34-3, 45-55
5 Buch, C (2001), "Money Demand in Hungary and Poland," Applied Economics 33, 989-999
6 Carr, J L., and M R. Darby (1981), "The Role of Money Supply Shocks in the Short-Run Demand for Money," Journal of Monetary Economics 8, 183-199
7 Cuthbertson K., and D Bredin (2001), "Money Demand in the Czech Republic Since Transition," Policy Reform 4, 271-290
8 Fair, R.C (1987), 'International Evidence on the Demand for Money," Review of Economics and Statistics LXIX, 473-480
9 Friedman, M (1959), "The Demand for Money Some Theoretical and Empirical Results," Journal of Political Economy 67, 327-351
10 Hetzel, R.L. (1984), "Estimating Money Demand Functions," Journal of Money, Credit and Banking 16, 185-193
11 Poole, W (1987), "Monetary Policy Lessons of Recent Inflation and Disinflation," NBER Working Paper 0010
12 Sriram S S (1999), "Survey of Literature on Demand for Money Theoretical and Empirical Work with Special Reference to Error-correction Models," IMF Working Paper WP 99/64, Washington, DC, IMF
13 Tobin, J (1956), "The Interest Elasticity of the Transactions Demand for Cash", Review of Economics and Statistics, August, 241-247
14 "Liquidity Preference as Behavior Toward Risk", Review of Economic Studies 25 65-86
15 Walsh, C (1984), "Interest Rate Volatility and Monetary Policy," Journal of Money, Credit and Banking 16, 133-150

С. К. Кыдыралиев,
кандидат физико-математических наук,
доцент, ассоциированный профессор направления
"Естественные науки и информационные технологии"

А. Б. Урдалетова,
кандидат физико-математических наук,
доцент Кыргызско-Турецкого университета "Манас"

Некоторые приложения линейных разностных уравнений к экономиксу

Большим преимуществом разностных уравнений является то, что с их помощью, используя довольно ограниченный круг математических знаний и умений, можно перевести на язык математики (смоделировать) и решить широкий класс прикладных задач, в частности, экономических

Уравнение

$$x_n = ax_{n-1} + b \tag{1}$$

называется линейным разностным уравнением первого порядка с постоянными коэффициентами

Здесь, a и b – коэффициенты уравнения, x_k – неизвестное, описывающее состояние системы в момент k

Характерной особенностью уравнения (1) является то, что оно используется для описания ситуаций, в которых состояние системы полностью определяется ее состоянием в предыдущий момент В связи с этим уравнения вида (1) часто называются *рекуррентными*

Для того, чтобы найти решение уравнения (1), сначала отследим несколько шагов

$x_1 = ax_0 + b,$

$x_2 = a x_1 + b,$ и подставив вместо x_1 его значение из предыдущего равенства, получим

$x_2 = a(a x_0 + b) + b = a^2 x_0 + a b + b,$

$x_3 = ax_2 + b,$ и повторив процесс, получим

$x_3 = a(a^2 x_0 + a b + b) + b = a^3 x_0 + a^2 b + ab + b,$

$x_4 = a x_3 + b = a(a^3 x_0 + a^2 b + ab + b) = a^4 x_0 + a^3 b + a^2 b + ab + b$

Тенденция ясна Можно сделать индукционное предположение

$$x_{n\ 1} = a^{n\ 1} x_0 + a^{n\ 2} b + a^{n\ 3} b + \ldots + ab + b.$$

Индукционный переход

$$x_n = ax_{n\ 1} + b = a(a^{n\ 1} x_0 + a^{n\ 2} b + a^{n\ 3} b + \ldots + ab + b) + b$$

подтверждает наше предположение

$$x_n = a^n x_0 + a^{n\ 1} b + a^{n\ 2} b + \ldots + ab + b \tag{2}$$

Преобразуем равенство (2)

$$x_n = a^n x_0 + b(a^{n\ 1} + a^{n\ 2} + \ldots + a + 1) \tag{3}$$

Выражение в скобках является суммой членов геометрической прогрессии Использовав формулу для суммы членов геометрической прогрессии, из формулы (3) получим решение уравнения (1)

$$x_n = a^n x_0 + b\frac{1-a^n}{1-a}; \tag{4}$$

<u>Модель Эванса</u> Рыночная цена товара была равна p_0 После того как под воздействием внешних обстоятельств спрос и предложение на этом рынке стали описываться уравнениями $q^d = a - bp^d$ и $q^s = e + fp^s$ (коэффициенты a, b, f неотрицательны), господин Маршалл заявил, что он знает, что новая равновесная цена будет равна $\dfrac{a-e}{b+f}$

В ответ господин Эванс сказал "А я знаю, каким образом рынок приходит к этой цене"

Далее мы приводим рассуждения господина Эванса

Изменение рыночных условий приводит к изменению равновесной цены Причем изменение цены прямо пропорционально разнице между объемом текущего спроса и текущего предложения На математическом языке это выражается следующим разностным уравнением

$$p_n = p_{n-1} + k\,(q^d_{n-1} - q^s_{n-1}),$$

где k – это коэффициент пропорциональности, определяемый неценовыми факторами. Подставив значения q^d и q^s, получим линейное разностное уравнение 1-го порядка с постоянными коэффициентами:

$$p_n = p_{n-1} + k\,[(a - bp_{n-1}) - (e + fp_{n-1})]. \qquad (5)$$

Отсюда, собрав подобные члены, получим

$$p_n = p_{n-1}\,(1 - kb - kf) + k\,(a - e).$$

Уравнение (5), согласно формуле (4), есть функция

$$p_n = (1 - kb - kf)^n p_0 + k(a - e)\frac{1 - (1 - kb - kf)^n}{kb + kf}. \qquad (6)$$

В частности, из формулы (6) следует, что если число $1 - kb - kf$ по абсолютной величине меньше единицы, $k \neq 0$, то при $n \to \infty$ цена будет стремится к числу, указанному господином Маршаллом: $\dfrac{a - e}{b + f}$.

Пример. Пусть функция спроса задана уравнением $q^d = 10 - p^d$, функция предложения уравнением $q^s = 1 + 2p^s$, а цена в начальный момент времени равна 2. Тогда изменение цены на этом рынке, согласно модели Эванса, будет описываться последовательностью

$$p_n = (1 - k\cdot 3)^n 2 + k\cdot 9\cdot\frac{1 - (1 - k\cdot 3)^n}{k\cdot 3}.$$

Если ситуация на рынке не будет меняться достаточно долго, а $0 < |1 - k\cdot 3| < 1$, то цена будет стремится к 3.

При этом,

если $0 < k < 1/3$, то цена будет последовательно повышаться от 2 к 3,

а если $1/3 < k < 2/3$, цена будет приближаться к 3, попеременно сверху и снизу.

Паутинообразная модель. Модель Эванса включает в себя коэффициент пропорциональности k, который иногда трудно объяснить. Эта проблема отсутствует при использовании паутинообразной модели (правда, появляются новые проблемы), которую мы проиллюстрируем следующей ситуацией.

Синбад-Мореход, который возит товары на продажу на остров ЭкТ, узнав от купцов, бывших до него на острове, что они продали каждый ящик с шоколадом за 10 мер серебра, взял с собой 10 ящиков. На острове выяснилось, что он может продать весь шоколад по цене 14 мер серебра за ящик. Вдохновленный этой ценой, он на следующий раз привез 14,8 ящиков шоколада. Но, к сожалению, он сумел продать эту партию шоколада только по цене 11,6 мер серебра за ящик. Поэтому в 3-й раз Синбад-Мореход взял с собой только 11,92 ящика шоколада...

Считая, что предложение шоколада со стороны Синбада-Морехода и спрос на шоколад со стороны островитян линейны, выпишем соответствующие функции. Далее, предполагая, что на этот остров не будут ездить другие торговцы шоколадом, а спрос и предложение останутся неизменными, определим на какой цене и при каком объеме стабилизируется рынок.

Из условий следует, что объем предложения шоколада в каждой поездке определяется ценой, по которой шоколад был продан в предыдущую поездку. Отсюда, функция предложения $q_n^s = e + f p_{n-1}$. Подставив значения, получим систему уравнений, которая позволит определить коэффициенты функции предложения: $\begin{cases} 10 = e + f \cdot 10, \\ 14{,}8 = e + f \cdot 14 \end{cases}$

Решив эту систему, получим, что предложение шоколада со стороны Синбад-Морехода задается функцией $q_n^s = 1{,}2p_{n-1} - 2$. Справедливость этого утверждения можно проверить данными 3-й поездки: $11{,}92 = 1{,}2(11{,}6) - 2$.

Коэффициенты функции спроса на шоколад со стороны островитян

$q_n^d = a + b\,p_n$ определяются системой уравнений $\begin{cases} 10 = a + b \cdot 14, \\ 14{,}8 = a + b \cdot 11{,}6 \end{cases}$.

Решение системы: $a = 38; b = -2$.

Следовательно, цена, по которой продается шоколад в каждый приезд Синбада-Морехода, а также количество товара, который он каждый раз берет на остров, задаются системой уравнений $\begin{cases} q_n^d = 38 - 2p_n, \\ q_n^s = 1{,}2p_{n-1} - 2 \end{cases}$ и начальным условием $p_0 = 10$. Так как Синбад-Мореход каждый раз продает весь товар, при каждой поездке объем спроса равен объему предложения.

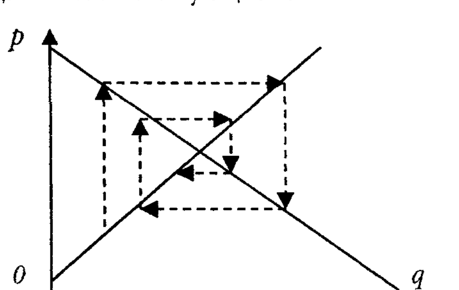
Поэтому имеет место равенство $38 - 2p_n = 1{,}2p_{n-1} - 2$. Отсюда, $p_n = -0{,}6p_{n\ 1} + 20$.

Решение этого уравнения,

$$p_n = (-0{,}6)^n p_0 + 20\,\frac{1-(-0{,}6)^n}{1-(-0{,}6)} = (-0{,}6)^n \cdot 10 + 20\,\frac{1-(-0{,}6)^n}{1+0{,}6}.$$

Устремив n к бесконечности, получим, что цена стабилизируется на уровне $12{,}5$, и при этом будет продаваться 13 ящиков шоколада.

Для того чтобы понять, откуда пошло название модели, нарисуем линии спроса и предложения и соединим соответствующие точки.



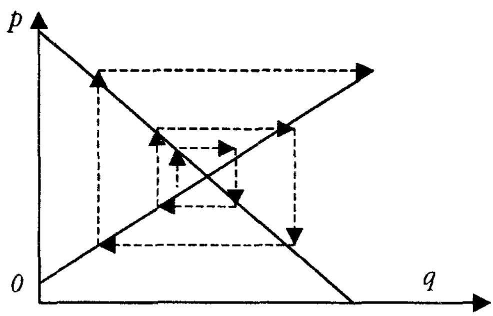
Выше мы упоминали о недостатках, сопутствующих паутинообразной модели. В качестве примера предположим, что спрос и предложение шоколада задаются уравнениями $q_n^d = 38 - 2p_n$ и $q_n^s = 3p_{n\,1} - 2$. Тогда соответствующее разностное уравнение будет иметь вид $p_n = -1{,}5p_{n\,1} + 20$.

Его решение

$$p_n = (-1{,}5)^n p_0 + 20\,\frac{1-(-1{,}5)^n}{1-(-1{,}5)} = (-1{,}5)^n \cdot 10 + 20\,\frac{1-(-1{,}5)^n}{1+1{,}5}.$$

Так как последовательность $(-1{,}5)^n$ не имеет предела, мы получаем, что цена на таком рынке никогда не стабилизируется.

Соответствующий график имеет вид раскручивающейся спирали:



Для того чтобы определить условия, при которых цена на рынке в условиях паутинообразной модели стабилизируется, напишем уравнения спроса и предложения в общем виде: $q_n^d = a - bp_n$, $q_n^s = e + fp_{n-1}$; а затем выпишем разностное уравнение:

$p_n = \dfrac{f}{-b}p_{n-1} + \dfrac{e-a}{(-b)}$ и решим его:

$$p_n = \left(-\frac{f}{b}\right)^n p_0 + \frac{e-a}{(-b)}\cdot\frac{1-(-f/b)^n}{1-(-f/b)} = \left(-\frac{f}{b}\right)^n \left(p_0 + \frac{a-e}{b+f}\right) + \frac{a-e}{b+f}.$$

Последовательность цен сходится, то есть стабилизируется на числе $\dfrac{a-e}{b+f}$ только в том случае, когда абсолютное значение числа $\dfrac{f}{b}$ меньше чем 1.

Другими словами, паутинообразная модель может подсказать, как будет меняться цена на рынке в долгосрочный период только в том случае, когда "наклон" функции спроса будет по абсолютной величине больше, чем "наклон" функции предложения.

В заключение, отметим, что полученная равновесная цена совпадает с оной, полученной, исходя из модели Эванса, что впрочем и не удивительно. Было бы странно, если бы дело обстояло не так.

Модели изменения уровня безработицы

Задача 1. В стране "Альфа" размер рабочей силы неизменен и равен 2,5 млн. человек, число безработных в начальный момент времени 120 000. Пусть, ежемесячно 1% занятых теряют работу, а 19% безработных находят работу. Сколько безработных будет в этой стране через 9 месяцев? Сколько безработных будет в этой стране через много месяцев, если указанные условия не будут меняться?

Сформулируем и решим задачу в общем виде. Пусть L означает величину рабочей силы. Она предполагается неизменной. Тогда, если E_n – число работающих , а U_n – число безработных на конец периода времени с номером n, имеет место равенство $L = E_n + U_n$.

Отметим, что число U_n/L называется уровнем безработицы.

Пусть s – показатель уровня увольнения работающих, то есть доля занятых, которые теряют работу в рассматриваемом периоде, f – показатель уровня трудоустройства, то есть доля безработных, которые находят работу в рассматриваемом периоде. Предположим, что оба этих показателя постоянны, и убедимся, что они определяют уровень безработицы.

Тогда, приняв во внимание тот факт, что $E_n = L - U_n$, получим уравнение

$$U_n = U_{n-1}(1 - f) + s(L - U_{n-1}). \tag{7}$$

Переписав его в виде (1)

$$U_n = U_{n-1}(1 - f - s) + sL, \tag{8}$$

получим линейное разностное уравнение 1-го порядка.

Его решение можно записать в виде (4):

$$U_n = U_0(1 - f - s)^n + sL\frac{1-(1-f-s)^n}{1-(1-f-s)}. \tag{9}$$

Предполагая, что условия на рынке труда длительное время меняться не будут, из (9) можно (при $n \to \infty$) получить, что

$$U = \frac{sL}{f+s}. \tag{10}$$

Отсюда можно получить формулу, приведенную в главе 5 известной книги Н. Грегори Мэнкью "Макроэкономика" [2]:

$$\text{уровень безработицы } \frac{U}{L} = \frac{s}{f+s}. \tag{11}$$

Отметим, что формула (11) в книге [3] получена другим путем.

Вернемся, к числовому примеру, к стране "Альфа".

Из условий: $L = 2500000;\ U_0 = 120\,000;\ s = 0{,}01;\ f = 0{,}19.$

Тогда, из формулы (9) получим оценку числа безработных в этой стране через 9 месяцев:

$$U_9 = 120000(1-0{,}19-0{,}01)^9 + 0{,}01\cdot 2500000\frac{1-(1-0{,}19-0{,}01)^9}{1-(1-0{,}19-0{,}01)} =$$

$$= 16106 + 108223 = 124329.$$

Предполагая, что условия на рынке труда длительное время меняться не будут, получаем, что на рынке труда наступит равновесие, если число безработных в этой стране будет равно $U = 0{,}01 \cdot 2500000 \dfrac{1}{0{,}19 + 0{,}01} = 12500$, или, другими словами, уровень безработицы стабилизируется на уровне 12500/2500000 = 0,05 = 5%. Это число можно получить непосредственно из условий задачи, подставив значения *s = 0,01* и *f = 0,19* в формулу (9): $\dfrac{0{,}01}{0{,}19 + 0{,}01} = 0{,}05$.

Разностные уравнения вида (1) хорошо изучены.

Далее, мы будем говорить об уравнениях с переменными коэффициентами.

Для того чтобы выписать решение разностного уравнения

$$v_t - av_{t\ 1} = g(t), \tag{12}$$

перепишем его в виде

$$a^t(a^{\ t} v_t - a^{(t\ 1)} v_{t\ 1}) = g(t),$$

и обозначив $a^{\ t} v_t = u_t$ имеем $u_t - u_{t\ 1} = a^{\ t} g(t)$.

Так как $u_t - u_s = (u_t - u_{t-1}) + (u_{t\ 1} - u_{t\ 2}) + \ldots + (u_{s+1} - u_s)$

получаем, что

$$u_t = u_s + a^{-t} g(t) + a^{(t\ 1)} g(t-1) + \ldots + a^{-(s+1)} g(s+1)$$

или

$$v_t = a^t [v_s a^{-s} + a^{-t} g(t) + a^{(t-1)} g(t-1) + \ldots + a^{(s+1)} g(s+1)]. \tag{13}$$

Рассмотрим несколько частных случаев уравнения (10).

Решение уравнения

$$v_t - av_{t\ 1} = b\, d^{\ t\ 1}, \tag{14}$$

если задано значение v_0, будет иметь вид

$$v_t = a^t [v_0 + b(d/a)^{(t\ 1)} + b(d/a)^{(t\ 2)} + \ldots + b(d/a) + b]\,. \tag{15}$$

Просуммировав члены геометрической прогрессии, получим формулу

$$v_t = a^t v_0 + b\frac{d^t - a^t}{d - a}. \tag{16}$$

Формула (16) не имеет смысла в случае, когда $d = a$. В этом случае, формула (15) имеет вид

$$v_t = a^t [v_0 + b/a + b/a + \ldots + b/a + b/a] = v_t = a^t v_0 + b\, a^{t\ 1} t.$$

Задача 2. В стране "Бетта" размер рабочей силы в начальный момент времени равен 2,5 млн. человек и ежемесячно растет на 0,5%, число безработных в начальный момент времени 120 000. Пусть, ежемесячно 1% занятых теряют работу, а 19% безработных находят работу. Сколько безработных будет в этой стране через 9 месяцев? Сколько безработных будет в этой стране через много месяцев, если указанные условия не будут меняться?

Решим и эту задачу в общем виде Пусть L_n означает величину рабочей силы. Тогда, если она ежемесячно меняется на *g100%*, величина рабочей силы в момент времени *n* будет иметь вид $L_n = L_0(1 + g)^n$.

Тогда, имеет место равенство $L_n = E_n + U_n$.

Приняв во внимание тот факт, что $E_n = L_n - U_n$, получим уравнение

$$U_n = U_{n-1}(1-f) + s(L_{n-1} - U_{n-1}). \tag{17}$$

Переписав его в виде (1)

$$U_n = U_{n-1}(1-f-s) + s\,L_0(1+g)^{n-1}, \tag{18}$$

получим линейное разностное уравнение 1-го порядка вида (14)

Его решение можно записать в виде (16)

$$U_n = U_0(1-f-s)^n + sL_0\frac{(1+g)^n-(1-f-s)^n}{g+f+s} \tag{19}$$

Разделив U_n на L_n, получим уровень безработицы в период времени n Предполагая, что условия на рынке труда длительное время меняться не будут, разделив (19) на L_n при $n \to \infty$ получаем, что уровень безработицы стабилизируется на уровне

$$\frac{U}{L} = \frac{s}{g+f+s} \tag{20}$$

Формула (20) является новым, более расширенным вариантом формулы (11)

Числовой пример для страны "Бетта"

Из условий $L_0 = 2500000$, $U_0 = 120\,000$; $s = 0{,}01$; $f = 0{,}19$, $g = 0{,}005$.

Тогда, из формулы (19) получим оценку числа безработных в этой стране через 9 месяцев

$$U_9 = 120000(1-0{,}19-0{,}01)^9 + 0{,}01\cdot 2500000\frac{(1+0{,}005)^9-(1-0{,}19-0{,}01)^9}{(1+0{,}005)-(1-0{,}19-0{,}01)} =$$
$$= 16106 + 111182 = 127288.$$

Предполагая, что условия на рынке труда длительное время меняться не будут, получим, что уровень безработицы стабилизируется на уровне

$$\frac{0{,}01}{0{,}005+0{,}19+0{,}01} = 0{,}04878.$$

Литература

1 Абчук В А. Задачник по экономике – СПб ДЕАН, 1999 – 168 с
2 Мэнкью Н Г Макроэкономика – М МГУ,1994 – 736 с
3 Cozzens B, Porter R.D Mathematics with Calculus – USA, D C Heath and Company, 1987 – 910 p

Э. Т. Мусуралиева,
кандидат физико-математических наук, доцент,
ассоциированный профессор направления
"Естественные науки и информационные технологии"

О решении прикладных задач

В связи с возросшей ролью математики в современной науке и технике большое число будущих инженеров, экономистов, социологов и т.д нуждается в серьезной математической подготовке, которая давала бы возможность математическими метода-