$$U_n = U_{n-1}(1-f) + s(L_{n-1} - U_{n-1}). \qquad (17)$$

Переписав его в виде (1)

$$U_n = U_{n-1}(1-f-s) + s\,L_0(1+g)^{n-1}, \qquad (18)$$

получим линейное разностное уравнение 1-го порядка вида (14)

Его решение можно записать в виде (16)

$$U_n = U_0(1-f-s)^n + sL_0\frac{(1+g)^n-(1-f-s)^n}{g+f+s} \qquad (19)$$

Разделив $U_n$ на $L_n$, получим уровень безработицы в период времени $n$ Предполагая, что условия на рынке труда длительное время меняться не будут, разделив (19) на $L_n$ при $n \to \infty$ получаем, что уровень безработицы стабилизируется на уровне

$$\frac{U}{L} = \frac{s}{g+f+s} \qquad (20)$$

Формула (20) является новым, более расширенным вариантом формулы (11)

Числовой пример для страны "Бетта"

Из условий $L_0 = 2500000$, $U_0 = 120\,000$; $s = 0{,}01$; $f = 0{,}19$, $g = 0{,}005$.

Тогда, из формулы (19) получим оценку числа безработных в этой стране через 9 месяцев

$$U_9 = 120000(1-0{,}19-0{,}01)^9 + 0{,}01\cdot 2500000\frac{(1+0{,}005)^9-(1-0{,}19-0{,}01)^9}{(1+0{,}005)-(1-0{,}19-0{,}01)} =$$

$$= 16106 + 111182 = 127288.$$

Предполагая, что условия на рынке труда длительное время меняться не будут, получим, что уровень безработицы стабилизируется на уровне

$$\frac{0{,}01}{0{,}005+0{,}19+0{,}01} = 0{,}04878.$$

***Литература***

1 Абчук В А. Задачник по экономике – СПб ДЕАН, 1999 – 168 с
2 Мэнкью Н Г Макроэкономика – М МГУ,1994 – 736 с
3 Cozzens B , Porter R.D Mathematics with Calculus – USA, D C Heath and Company, 1987 – 910 p

***Э. Т. Мусуралиева,***
*кандидат физико-математических наук, доцент,*
*ассоциированный профессор направления*
*"Естественные науки и информационные технологии"*

# О решении прикладных задач

В связи с возросшей ролью математики в современной науке и технике большое число будущих инженеров, экономистов, социологов и т.д нуждается в серьезной математической подготовке, которая давала бы возможность математическими методами исследовать широкий круг новых проблем. Основными моментами проблемы математического образования являются: выбор объема и содержания математических курсов, определение целей обучения, правильное сочетание широты и глубины изложения, выбор наиболее эффективных и рациональных путей обучения, и все это с учетом ограниченного времени, отводимого на обучение математики.

Обучение математике нельзя подменить обучением ряда ее приложений и методов, не разъясняя сущности математических понятий. Математизация – это характерная черта современной науки и техники. Исследователи ныне как никогда осознали, что знание делается точным только тогда, когда для ее описания удается использовать математическую модель (уже известную или специально созданную). Математика развивается порой под действием внешних факторов. Например, изучение задач механики, законов движения материальных тел, вычисление площадей и объемов привело к созданию дифференциального и интегрального исчислений. Наблюдение какого-либо явления порой приводит к постановкам чисто математических задач, которые затем исследуются сами по себе без связи с самим явлением. Так, древние греки, заметив, что высота звучания струн зависит от длины, стали заниматься изучением отношений чисел и назвали эту часть математики музыкой. В настоящий момент теория музыки пошла далеко вперед, человеческое воображение и талант многих композиторов дали миру огромное количество музыкальных направлений, различающихся между собой по своей гармонии, ритму и построению. Современные технологии позволили опять вернуться от музыки к математике, создав многочисленные компьютерные программы для музицирования.

Американский университет в Центральной Азии предлагает студентам различные направления специализации. Поскольку наиболее многочисленными являются направления "Экономика" и "Управление бизнесом", предлагаю на рассмотрение несколько прикладных задач. Практическая ценность математических исследований определяется прежде всего конкретными результатами. Экономическая теория в этом смысле продвинулась далеко вперед. Такие понятия, как производственная функция, прибыль, издержки и другие, вошли в повседневную жизнь предпринимателей.

Один из таких примеров, который имеет большое практическое применение в теории финансов – это задача определения возможности арбитража на рынке, где функционируют несколько финансовых титулов. В качестве временных рамок мы рассмотрим моменты времени $t = 0$ (сегодня) и $t = 1$ (через год).

Рассмотрим три финансовых титула, которые могут принести платежи, зависимые от трех различных ситуаций, могущих вступить в силу в момент времени $t = 1$. Пространство ситуаций является дискретным и конечным.

*Таблица 1*

| Титул | Ситуация | | Цена |
|---|---|---|---|
| | Z1 | Z2 | |
| 1 | 6 | 5 | 8 |
| 2 | 5 | 4 | 5 |
| 3 | 8 | 6 | 6 |

Тот, кто выберет первый финансовый титул, должен заплатить сегодня \$ 8. Через год он получит возвратный денежный поток равный \$ 6, если сложится ситуация Z1, и \$ 5 – если сложится ситуация Z2. Аналогичным образом заданы финансовые титулы второго и третьего типа.

Сформируем портфель, который в момент времени t = 1 с определенностью приносит приток средств в сумме \$ 10.

Вопрос заключается в следующем: сколько нужно купить и продать финансовых титулов с номерами 1, 2, и 3 с тем, чтобы в момент времени t = 0 расход равнялся бы отрицательному числу "–10", т.е. фактически доходу, равному 5.

Принимая во внимание постановку задачи, запишем систему уравнений

$$\begin{aligned} 8\cdot n_1+5\cdot n_2+6\cdot n_3&=-5\\ 6\cdot n_1+5\cdot n_2+8\cdot n_3&=10\\ 5\cdot n_1+4\cdot n_2+6\cdot n_1&=10, \end{aligned} \qquad (1)$$

где $n_1$, $n_2$, $n_3$ – количество финансовых титулов типа 1, 2 и 3 соответственно.

Определитель этой системы равен –2, обратная матрица имеет вид

$$A^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & 3 & -5\\ -2 & 9 & 14\\ 0.5 & 3.5 & -5 \end{bmatrix}$$

и наконец, решая систему уравнений, находим $(n_1, n_2, n_3) = (-25, 60, -17.5)$. Таким образом, надо продать 25 финансовых титулов первого типа, купить 60 финансовых титулов второго типа и продать 17.5 титулов третьего типа. В результате данный портфель даст нам гарантированный денежный поток равный \$ 10 при первой и второй ситуации.

Легко заметить, что данную задачу можно рассмотреть, когда число финансовых титулов больше, равно или меньше числа ситуаций. В этом случае говорят о неполном рынке капитала, полном рынке капитала и переполненном рынке капитала. Применив теорему Кронеккера-Капелли, можно исследовать случай множества решений системы уравнений.

Кроме того, эта система позволяет сформировать портфель, состоящий из финансовых титулов типа один и два, который будет давать возвратные денежные потоки, равные возвратным потокам третьего финансового титула.

Пусть титул №3 – это портфель, который можно представить в виде суммы титулов №1 и №2, тогда

$$\begin{aligned} 6\cdot n_1+5\cdot n_2&=8\\ 5\cdot n_1+4\cdot n_2&=6. \end{aligned}$$

Решение системы $n_1 = -2$, $n_2 = 4$. При этом стоимость пакета в целом равна \$ 6, а стоимость титулов пакета по отдельности равна $8\cdot(-2)+5\cdot 4=4$.

Это позволяет доказать возможность арбитража второго типа, что означает: стоимость портфеля, состоящего из суммы нескольких финансовых титулов, не равна стоимости финансовых титулов по отдельности.

Согласно лемме Минковского-Фаркаша можно доказать отсутствие арбитража. Для этого перепишем таблицу 1 в виде

| Титул | Ситуация | | Цена |
|---|---|---|---|
| | Z1 | Z2 | |
| 1 | 6 | 5 | 8 |
| 2 | 5 | 4 | 65 |
| 3 | 8 | 6 | 10 |

заменив цены титулов второго и третьего типов на 6 5 и 10

В этом случае вводятся понятия примитивных ценных бумаг $\pi_i$ и система уравнений относительно примитивных ценных бумаг записывается в виде

$$6\pi_1 + 5\pi_2 = 8$$
$$5\pi_1 + 4\pi_2 = 6 5,$$

тогда $\pi_1 = 0 5$ и $\pi_2 = 1$, что не противоречит третьему финансовому титулу А это значит, на данном рынке капитала арбитраж отсутствует

Особый интерес представляют задачи дифференциального исчисления в экономике – задачи на нахождение оптимального значения функции одного или нескольких переменных При решении таких задач возникают такие понятия как предельные величины Предельная величина MF($x$) – это есть производная функции F($x$) по независимой переменной х В дискретном случае предельная величина MF($x$) равна отношению приращения функции $\Delta F$ к вызвавшему это приращение изменению переменной $\Delta x$, т е $MF(x) = \frac{\Delta F}{\Delta x}$ Эти абстрактные предельные величины могут получить конкретную интерпретацию в экономике как предельные издержки (marginal cost), предельный доход (marginal revenue), предельная полезность (marginal utility), предельная норма замещения (marginal rate of substitution) и т.д Такого типа однородные, в некотором смысле, понятия в экономике дают возможность составления большого количества типовых расчетных заданий для самостоятельной работы студентов, что особо актуально в условиях предстоящего перехода на систему кредит-часов

Типовые расчетные задания могут включать задачи на построение графиков каждой из перечисленных функций, исходных (суммарных) функций F($x$) и средних $AF(x) = \frac{F(x)}{x}$, нахождение максимального или минимального значения этих функций и объяснение полученных результатов

Рассмотрим функцию полезности $u = U(x_1, x_2)$ Набор благ $(x_1, x_2)$ может быть в общем случае $n$-мерным вектором $(x_1, x_2, \ x_n)$ Эта функция характеризует полезность данного набора благ для индивида и обладает целым рядом свойств, которые легко объяснить с помощью предельного анализа Например, предельная полезность $M_1U(x)$ – дополнительная полезность, полученная от дополнительной единицы блага $x_1$

$M_1U = \frac{\partial U}{\partial x_1} > 0$, что означает увеличение потребления одного из продуктов при постоянном потреблении другого продукта ведет к возрастанию функции полезности. Закон убывания предельной полезности также можно записать в виде $\frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2} < 0$, $\frac{\partial^2 U}{\partial x_2^2} < 0$.

Следующим шагом в изучении теории полезности является задача потребительского выбора:

Найти $U(x_1, x_2) \rightarrow \max$

при условиях $p_1x_1 + p_2x_2 \le I, x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$, где $p_1$ и $p_2$ – рыночные цены одной единицы продукции соответственно $x_1$ и $x_2$. Иногда такие задачи легко решаются графически. Например, если кривые безразличия – наклонные прямые (рис. 1), то очевидно решением задачи в зависимости от наклона кривых безразличия будет одна из угловых точек А или В бюджетного множества.

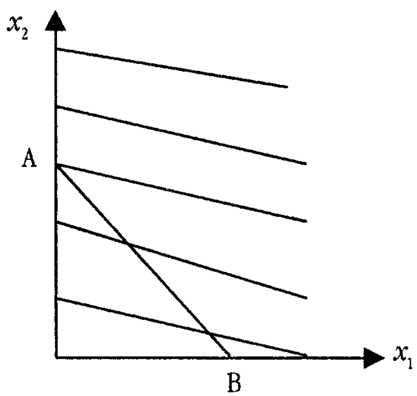


*Рис. 1*

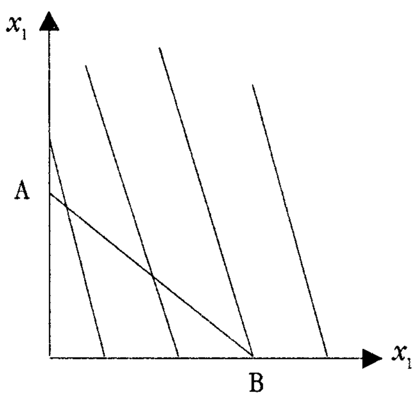


*Рис. 2*

Теория полезности, рассмотренная выше, изучается в условиях определенности.

Особый интерес представляет принятие решений в условиях неопределенности. В основе этих рассуждений лежит принцип Даниила Бернулли, швейцарского математика, физика и медика. Здесь рассматривается вопрос выбора одной из взаимоисключающих альтернатив $A_i$ с i = 1, 2, ..., I. Число альтернатив является конечным. Каждая из альтернатив имеет s исходов соответственно с вероятностями $q_S$, s = 1, 2, ..., S и $\sum q_s = 1$. Согласно принципа Бернулли таблица исходов всех альтернатив с помощью функции полезностей трансформируется в таблицу полезностей, где уже можно найти математическое ожидание (ожидаемая полезность) каждой альтернативы и решать всевозможные задачи линейного программирования. Кроме того, исследуя соотношения ожидаемого богатства и ожидаемой полезности, можно делать выводы относительно лица, принимающего решения как он относится к риску.

Например, рассмотрим следующую задачу. Предположим, что у владельца кондитерской фабрики единственный источник дохода – это продукция его фабрики. К сожалению, фабрика находится близко к реке и иногда подвергается наводнению. Предположим, что ожидаемая полезность от производства вычисляется по формуле $M(U) = p\sqrt{c_f} + (1-p)\sqrt{c_{nf}}$, где p – это вероятность наводнения, 1 – p – вероятность того, что наводнения не будет, $c_f$ и $c_{nf}$ – это потребление при наводнении и при отсутствии наводнения соответственно. Вероятность наводнения $p = 0.1$. Кондитерская фабрика оценивается стоимостью в \$ 500000 при отсутствии наводнения и то, что останется от фабрики после наводнения, будет оценено только как \$ 50000. Предположим следующие условия страховки: если владелец застрахует фабрику на \$ 1, то он должен заплатить \$ 0.1 за страховку независимо от того, будет или не будет наводнение. В случае наводнения он получит \$ 1 для возмещения убытков. Найти оптимальное потребление при наводнении и при отсутствии наводнения. Найти сумму, на которую ему необходимо застраховаться.

Запишем, чему равно потребление при наводнении и при отсутствии наводнения:

$$c_{nf} = 500000 - 0.1x$$
$$c_f = 50000 + 0.9x.$$

Исключив x из обоих уравнений, мы получим бюджетное ограничение $c_{nf} + 9c_f = 4550000$.

$$\mathrm{MRS}(c_{nf}, c_f) = -\frac{0.9c_f}{0.1c_{nf}}.$$

Приравнивая $\mathrm{MRS}(c_f, c_{nf})$ и угловой коэффициент бюджетного ограничения, получим $\frac{c_{nf}}{c_f} = 1$ и в оптимальной точке потребление имеет вид $(c_{nf}, c_f) = (455000, 455000)$. Таким образом, если он застрахует кондитерскую фабрику, то в случае наводнения он получит \$ 450000, такая страховка будет стоить \$ 45000.

***Литература***


1. Крушвиц Л. – Финансирование и инвестиции. – СПб.: Изд-во "Питер", 2000.
2. Hal R. Varian-Intermediate Microeconomics. A modern Approach. Third Edition. University of Michigan, 1987.
3. Красс М.С. – Математика для экономических специальностей. – М.: ИНФРА-М, 1998.


***С. Н. Скляр,***

*доктор физико-математических наук,*

*руководитель направления "Естественные науки и информационные технологии"*

# *Разностные схемы для решения сингулярно возмущенных задач, записанных в консервативной форме*

Для уравнения

$$\varepsilon u''(x) + [a(x)u(x)]' = f(x), \quad x \in (0,1) \tag{1}$$