

**СБОРНИК ЗАДАНИЙ
МАТЕМАТИЧЕСКИХ
ОЛИМПИАД АУЦА
ДЛЯ СТАРШЕКЛАССНИКОВ
(С РЕШЕНИЯМИ)**

2021

УДК
ББК
М

Рецензенты: Д. Г. Шостак, старший преподаватель АУЦА,
г. Бишкек,
А.Б. Байзаков, доктор физ.-мат. наук, профессор, Институт
математики АН КР,
А.М. Асанбеков, преподаватель Кыргызско-Шведской
математической школы, г. Бишкек

Скляр С.Н., Урдалетова А.Б., Бурова Е.С., Кыдыралиев С.К.
М Сборник заданий математических олимпиад АУЦА для
старшекласников. Учеб. пособие.- Бишкек: 2021. - 276 с.

ISBN

В книге собраны задачи, которые предлагались учащимся старших классов на математических олимпиадах, которые проводились в 2012-2019 годах. Задачи имеют различный уровень сложности и ориентированы на развитие логического мышления и творческих способностей учащихся.

В отличие от некоторых сборников олимпиадных задач, все предлагаемые задачи снабжены ответами и подробными решениями.

Предназначена для всех, кто интересуется математикой, в частности, для учащихся 7-11 классов.

М
УДК

ББК ISBN

© С.Н. Скляр и другие, 2021

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ	5
МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА 2012	9
Лист ответов: первый тур 2012 г.	15
МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА 2013	20
МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА 2014	30
МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА 2015	39
МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА 2016	46
МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА 2017	55
МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА 2018	64
МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА 2019	73
ОТВЕТЫ ПЕРВОГО ТУРА	83
ОТВЕТЫ ВТОРОГО ТУРА	89
РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ПЕРВОГО ТУРА	95
МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА 2012	96
МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА 2013	107
МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА 2014	122
МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА 2015	133
МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА 2016	144
МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА 2017	155
МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА 2018	166
МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА 2019	178
РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ВТОРОГО ТУРА	192
МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА 2012	193
МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА 2013	206

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА 2014	218
МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА 2015	231
МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА 2016	241
МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА 2017	250
МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА 2018	258
МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА 2019	268
КОРОТКО ОБ АУЦА И ПРОГРАММЕ ПМИ	277
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	281



ПРЕДИСЛОВИЕ

«Природа формулирует свои законы языком математики»

Галилео Галилей

«Математику уже затем учить надо, что она ум в порядок приводит»

Михаил Ломоносов

Олимпиады по математике для школьников Кыргызстана в АУЦА проводятся ежегодно, начиная с 2012 года. Всего было проведено восемь олимпиад, и лишь в 2020 и в 2021 годах мы вынуждены были отказаться от олимпиады из-за сложной эпидемиологической ситуации в Бишкеке.

Основные цели олимпиады – популяризация «математико-емких» специальностей «Прикладная математика и информатика», «Программная инженерия», и нашего университета в целом, а также привлечение в число студентов АУЦА выпускников школ с развитым аналитическим и логическим мышлением.

Организаторами олимпиады с самого начала являются программы «Прикладная математика и информатика» и «Программная инженерия», задачи также отбирали и создавали преподаватели этих программ. В 2013 году в

задания олимпиады были включены задачи, предложенные преподавателями департамента математики Бард-колледжа (Нью-Йорк, США). В процессе проведения мероприятий неоценимую помощь преподавателям оказывали наши студенты-волонтеры. Важную роль в поддержке и организации Олимпиад играли «Офис по связям с общественностью и СМИ», а также «Офис по приему» АУЦА.

Естественным спонсором олимпиады является наш университет: президент (вице-президент) определяет скидки на обучение в АУЦА для призеров. Эти скидки, как правило, варьируются год от года и зависят от возможностей нашего университета и наличия других спонсоров: так, для победителя первой олимпиады (в 2012 году) главный приз – iPad был предоставлен интернет-магазином Svetofor.kg, в 2013 году три стипендии для призеров олимпиады были учреждены Банком Азии.

Для участия в олимпиаде мы приглашаем школьников 10-х и 11-х классов. Участие принимали не только школьники из Бишкека, приезжали ребята из других городов Кыргызстана: Нарын, Ош, Джалал-Абад, Баткен, Кара-Балта. Как правило, проводится предварительная Интернет-регистрация участников, и окончательная, уже в здании АУЦА, в день олимпиады. Как показывает таблица,

расположенная ниже, число участников нашей математической олимпиады возрастает год от года, что, на наш взгляд, свидетельствует о росте интереса выпускников школ к нашему университету, а также к его «математикоёмким» специальностям.

***Динамика участия школьников
в математической олимпиаде АУЦА***

<i>Год</i>	<i>Число участников первого тура</i>
<i>2019</i>	<i>327</i>
<i>2018</i>	<i>188</i>
<i>2017</i>	<i>206</i>
<i>2016</i>	<i>129</i>
<i>2015</i>	<i>113</i>
<i>2014</i>	<i>78</i>
<i>2013</i>	<i>53</i>
<i>2012</i>	<i>54</i>

Олимпиаду мы проводим в два тура, но всё мероприятие проходит в один день: в первом (отборочном) туре, как правило, предлагается 15 задач различных уровней сложности, и проводится он в тестовом режиме, по результатам первого тура отбираются участники второго тура (20 школьников). Во втором туре дается 10 достаточно

сложных задач, решения которых проверяются преподавателями программ. Особенностью нашей олимпиады является наличие в обоих турах задач как математических, так и логических.

Таким образом, за восемь олимпиад было аккумулировано достаточно много нестандартных задач, которые могут быть полезны как школьникам, так и преподавателям для подготовки к новым олимпиадам и развития аналитического мышления школьников.

**МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
ОЛИМПИАДА 2012****ПЕРВЫЙ ТУР**

[Пройти тест онлайн](#)

[Решение](#)

1. (4 балла) У Маши и Мелиса были какие-то сбережения, но Маше не хватало для покупки мороженого шести центов, а Мелису двух центов. Они сложились, чтобы купить мороженое на двоих, но денег все равно не хватило. Сколько центов стоило этот мороженое?

Варианты ответов:

a) 7, b) 8, c) 9, d) 10, e) 11.

2. (4 балла) Первую половину пути велосипедист проехал со скоростью 20 км/час, но проколол шину и вторую половину пути прошел со скоростью 5 км/час. Какова была средняя скорость велосипедиста на всем пути?

Варианты ответов:

a) 7, b) 8, c) 10,5, d) 12,5, e) 15.

3. (7 баллов) Проехав за час половину пути, машинист увеличил скорость поезда на 15 км/ч и прошел вторую половину пути за 45 мин. С какой скоростью шел поезд первую половину пути?

Варианты ответов:

a) 30, b) 35, c) 40, d) 45, e) 50.

4. (7 баллов) Влажность фруктов перед сушкой была 23%, а после сушки стала 12%. На сколько процентов масса сухофруктов изменилась после сушки.

Варианты ответов:

a) 8,5, b) 11, c) 12,5, d) 15, e) 16,5.

5. (4 балла) Экзамен по математике сдавали 250 абитуриентов, оценку ниже пяти получили 180 человек, а выдержали этот экзамен (с оценкой >2) 210 абитуриентов. Сколько человек получили оценки 3 и 4?

Варианты ответов:

a) 40, b) 70, c) 140, d) 160, e) 180.

6. (7 баллов) В группе студентов каждый умеет играть хотя бы в одну игру: шахматы, домино или карты, а четверо умеют играть во все эти игры. В шахматы играют 12 человек; играть в домино и шахматы умеют 5 человек, а в карты и шахматы – шестеро студентов. Хотя бы в одну из двух игр: домино или карты играют 16 человек. Сколько студентов в этой группе?

Варианты ответов:

a) 17, b) 21, c) 25, d) 29, e) 31.

7. (7 баллов) Сколькими способами 3 мальчика и 4 девочки можно рассадить в одном ряду, если на противоположных концах этого ряда должны сидеть мальчик и девочка?

Варианты ответов:

a) 360, b) 720, c) 1440, d) 2100, e) 2880.

8. (9 баллов) Все целые числа, начиная с единицы, выписаны подряд. Таким образом, получается следующий ряд цифр: 123456789101112131415... Определить, какая цифра стоит на 206788-м месте?

Варианты ответов:

- a) 3, b) 5, c) 7, d) 9, e) 0.

В некоторых логических задачах встречаются сложные утверждения с логическими связками «либо», «или», «и». Напоминаем их смысл. Пусть P и Q какие-либо утверждения. Тогда:

- утверждение «либо P , либо Q » истинно, когда только одно из утверждений P , Q истинно;
- утверждение «или P , или Q » истинно, когда хотя бы одно из утверждений P , Q истинно;
- утверждение « P и Q » истинно, когда оба утверждения P , Q истинны;

Действие задач 9-12 происходит на острове. Предполагается, что каждый обитатель острова либо рыцарь, либо лжец. Рыцари всегда говорят только правду. Лжецы всегда лгут.

9. (4 балла) В этой задаче два персонажа: A и B . Каждый из них либо рыцарь, либо лжец. A высказывает следующее утверждение: "По крайней мере, один из нас лжец". Кто из двух персонажей A и B рыцарь и кто лжец?

Варианты ответов:

- a) A -рыцарь, B -лжец; b) A -рыцарь, B -рыцарь;
c) A -лжец, B -рыцарь; d) A -лжец, B -лжец.

10. (4 балла) В этой задаче снова два островитянина: A и B . Предположим, что A высказывает утверждение: "Я лжец и B не лжец". Кто из них рыцарь и кто лжец?

Варианты ответов:

- а) A -рыцарь, B -лжец; б) A -рыцарь, B -рыцарь;
 с) A -лжец, B -рыцарь; д) A -лжец, B -лжец.

11. (7 баллов) В этой задаче три островитянина: A , B и C . Проходивший мимо незнакомец спросил у A : «Вы рыцарь или лжец?». На этот вопрос A ответил неразборчиво. Тогда незнакомец спросил у B : "Что сказал A ?"; B ответил: " A сказал, что он лжец". И тогда C закричал: "Не верьте B ! Он лжет!". Кто из двух персонажей B и C рыцарь и кто лжец?

Варианты ответов:

- а) B -рыцарь, C -лжец; б) B -рыцарь, C -рыцарь;
 с) B -лжец, C -рыцарь; д) B -лжец, C -лжец.

12. (9 баллов) Снова в задаче три островитянина: A , B и C . Персонаж A высказывает утверждение: «Мы все лжецы», а B говорит: «Один из нас рыцарь». Кто из трех островитян A , B и C рыцарь и кто лжец?

Варианты ответов:

- а) A -рыцарь, B -рыцарь; C -лжец;
 б) A -рыцарь, B -рыцарь; C -рыцарь;
 с) A -рыцарь, B -лжец; C -рыцарь;
 д) A -рыцарь, B -лжец; C -лжец;
 е) A -лжец, B -рыцарь; C -лжец;
 ф) A -лжец, B -рыцарь; C -рыцарь;
 г) A -лжец, B -лжец; C -рыцарь;
 h) A -лжец, B -лжец; C -лжец; .

В задачах 13-15 на острове живут как мужчины, так и женщины, причем, каждый житель может быть либо рыцарем, либо лжецом, либо нормальным человеком. Рыцари всегда говорят правду, лжецы всегда лгут, а нормальные люди иногда говорят правду, а иногда и лгут. На этом острове рыцарю разрешается вступать в брак только с лжецом, а лжецу - только с рыцарем (следовательно, нормальный человек может вступать в брак только с нормальным человеком). Таким образом, в любой супружеской паре на острове либо оба супруга - нормальные люди, либо один из супругов - рыцарь, а другой - лжец.

13. (9 баллов) Рассмотрим супружескую пару с острова: мистер A и миссис AA . Мистер A высказывает утверждение: «Моя жена - не нормальный человек», в свою очередь, миссис AA говорит: «Мой муж - не нормальный человек». Кто такой мистер A и кто такая миссис AA - рыцарь, лжец или нормальный человек?

Варианты ответов:

- a) A - нормальный, AA - лжец; b) A -рыцарь, AA - лжец;
- c) A -рыцарь, AA - нормальный; d) A -лжец, AA -рыцарь;
- e) A -лжец, AA - нормальный; f) A -лжец, AA - лжец;
- g) A - нормальный, AA -рыцарь; h) A -рыцарь, AA -рыцарь;
- i) A -нормальный, AA - нормальный.

14. (9 баллов) Предположим, что мистер A и миссис AA высказали следующие утверждения: мистер A : «Моя жена - нормальный человек», а миссис AA : «Мой муж - нормальный человек». Кто такой мистер A и кто такая миссис AA - рыцарь, лжец или нормальный человек?

Варианты ответов:

- a) A - нормальный, AA - лжец; b) A -рыцарь, AA - лжец;

- с) A -рыцарь, AA -нормальный; d) A -лжец, AA -рыцарь;
 е) A -лжец, AA - нормальный; f) A -лжец, AA -лжец;
 g) A - нормальный, AA -рыцарь; h) A -рыцарь, AA -рыцарь;
 i) A -нормальный, AA - нормальный.

15. (9 баллов) В этой задаче речь пойдет о двух супружеских парах с острова: мистере A и миссис AA , мистере B и миссис BB . При опросе трое из них дали следующие показания. Мистер A : «Мистер B – рыцарь»; миссис AA : «Мой муж прав: мистер B – рыцарь»; миссис BB : «Что верно, то верно. Мой муж действительно рыцарь». Кто каждый из этих четырех людей - рыцарь, лжец или нормальный человек?

Варианты ответов:

- a) A - рыцарь, AA -лжец; B -рыцарь, BB -лжец;
 b) A -рыцарь, AA -лжец; B -лжец, BB -рыцарь;
 c) A -рыцарь, AA -лжец; B и BB - оба нормальные;
 d) A - лжец, AA - рыцарь; B -рыцарь, BB -лжец;
 e) A - лжец, AA - рыцарь; B -лжец, BB -рыцарь;
 f) A - лжец, AA - рыцарь; B и BB - оба нормальные;
 g) A и AA - оба нормальные; B и BB - оба нормальные;
 h) A и AA - оба нормальные; B -рыцарь, BB -лжец;
 i) A и AA - оба нормальные; B -лжец, BB -рыцарь;

Лист ответов: первый тур 2012 г.

**АМЕРИКАНСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ В
ЦЕНТРАЛЬНОЙ АЗИИ
МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА 2012**

ПЕРВЫЙ ТУР

Перенесите верные ответы из Вашего теста, обведя соответствующие буквы. Если Вы не согласны ни с одним из предложенных для данной задачи ответов - обведите букву «j» и рядом запишите ответ, который Вы считаете верным.

1. a b c d e	j	4
2. a b c d e	j	4
3. a b c d e	j	7
4. a b c d e	j	7
5. a b c d e	j	4
6. a b c d e	j	7
7. a b c d e	j	7
8. a b c d e	j	9
9. a b c d	j	4
10. a b c d	j	4
11. a b c d	j	7
12. a b c d e f g h	j	9
13. a b c d e f g h i	j	9
14. a b c d e f g h i	j	9
15. a b c d e f g h i	j	9

Всего баллов: _____



ВТОРОЙ ТУР

[Пройти тест онлайн](#)[Решение](#)

1. (1 балл) Из A в B и из B в A одновременно (на рассвете) вышли навстречу друг другу две старушки. Они встретились в полдень, но не остановились, а продолжили свой путь, не меняя скорости. Первая пришла в B в 4 часа дня, а вторая пришла в A в 9 часов вечера. В котором часу был в этот день рассвет?

2. (1 балл) Имеются два одинаковых ящика кубической формы заполненные шарами, сделанными из одного и того же материала. Шары уложены вплотную друг к другу и до самого верха. В первом ящике шары большие, а во втором меньшего диаметра. Какой из ящиков тяжелее?

3. (1 балл) На аэродром к прибытию самолета была выслана машина из почтового отделения. Самолет прибыл раньше установленного срока, и привезенная почта была направлена в почтовое отделение с мотоциклистом. Проехав полчаса, мотоциклист встретил машину, на которую была переложена почта, и машина, не задерживаясь, повернула обратно. В почтовое отделение машина прибыла на 20 мин. раньше, чем

следовало. На сколько минут раньше установленного срока самолет прибыл на аэродром?

4. (1 балл) Доказать, что среди всех треугольников с одинаковыми основанием и высотой, опущенной на это основание, наименьший периметр имеет равнобедренный треугольник.

5. (3 балла) В математической олимпиаде приняли участие 21 мальчик и 21 девочка. Известно, что: а) каждый из них решил не более шести задач; б) для каждого мальчика и каждой девочки найдется, по крайней мере, одна задача, которая была решена ими обоими. Докажите, что найдется задача, которую решили хотя бы 3 мальчика и 3 девочки.

6. (2 балла) Сколькими способами семь яблок можно раздать трем девочкам - Айпери, Жибек и Валерии, чтобы Жибек получила не меньше четырех яблок, а Валерия – не больше двух?

7. (5 баллов) В начале трассы находится заправочная станция с запасом горючего на 2 500 км пути джипа. Бензобак джипа вмещает горючего на 500 км пути. В любой точке трассы можно создавать запасы горючего, сливая его из бензобака. Джип может курсировать в любом направлении, в том числе, возвращаясь к началу пути, и к местам, где созданы запасы, для дозаправки. Какой максимальный путь может пройти джип, используя имеющееся горючее, при условии, что а) можно создать только один пункт дозаправки; б) можно

создать два различных пункта дозаправки. Описать траекторию пути джипа.

Предположим, что, решая задачи 8-10, вы находитесь в лесу, каждый обитатель которого либо рыцарь, либо лжец. Напомним, что рыцари всегда говорят правду, а лжецы всегда лгут. Кроме того, в лесу водятся оборотни, имеющие на редкость неприятную привычку иногда превращаться в волков и пожирать людей. Оборотень может быть либо рыцарем, либо лжецом.

8. (2 балла) Вы берете интервью у трех обитателей леса A , B , C . Известно, что ровно один из них оборотень. В беседе с вами A заявляет: « C – оборотень», B говорит: «Я не оборотень», и C добавляет: «По крайней мере, двое из нас лжецы». Наша задача состоит из двух частей. а) Кем является оборотень, присутствующий в этой компании: рыцарем или лжецом? б) Если бы вам предстояло выбрать одного из трех обитателей леса в попутчики и вопрос о том, не окажется ли ваш избранник оборотнем, волновал бы вас сильнее, чем вопрос, не окажется ли он лжецом, то на ком из трех вы бы остановили свой выбор?

9. (2 балла) Вы снова берете интервью у трех обитателей леса A , B и C . Известно, что каждый из них либо рыцарь, либо лжец и среди них имеется ровно один оборотень. В беседе с вами A заявляет: «Я оборотень», B также говорит: «Я оборотень», а C добавляет: «Не более чем один из нас рыцарь». Проведите полную классификацию персонажей A , B и C .

10. (2 балла) Мы снова встречаем трех обитателей леса A , B , C , каждый из которых либо рыцарь, либо лжец. Заявления делают только двое из них: A и B . В их высказываниях слово "нас" относится ко всем трем героям (к A , B и C), а не только к A и B . A заявил: «По крайней мере, один из нас рыцарь», B заявил: «По крайней мере, один из нас лжец». Известно, что, по крайней мере, один из троих оборотень и ни один не является одновременно рыцарем и оборотнем. Кто оборотень?

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
ОЛИМПИАДА 2013

ПЕРВЫЙ ТУР

[Пройти тест онлайн](#)[Решение](#)

1.(4 балла) Вниз по течению из пункта A в пункт B теплоход плывет 5 дней, а обратно 7 дней. Сколько дней нужно плоту, чтобы проплыть из A в B ?

Варианты ответов: (A) 6; (B) 10; (C) 12; (D) 24; (E) 35.

2.(4 балла) Буквы азбуки Морзе состоят из символов (точек и тире). Сколько различных букв можно изобразить, если потребовать, чтобы каждая буква содержала не более пяти символов?

Варианты ответов: (A)30; (B) 32; (C) 48; (D) 62; (E) 126.

3.(4 балла) В группе из 20 студентов каждый умеет играть хотя бы в одну игру: шахматы, домино или карты, а четверо умеют играть во все эти игры. Играть в домино и шахматы умеют 5 человек, а в карты и шахматы – шестеро студентов. Хотя бы в одну из двух игр: домино или карты играют 16 человек. Сколько студентов из этой группы умеют играть в шахматы?

Варианты ответов: (A) 10; (B) 11; (C) 12; (D) 13; (E) 14.

4.(4 балла) Каждый из двух братьев собирал грибы в свою корзину. Младший собрал 80 грибов (белых и груздей). Из них процент белых был в два раза меньше, а процент груздей в три

раза больше, чем у старшего брата. Сколько грибов собрали братья, если белых у них 92?

Варианты ответов:

(A) 142; (B) 155; (C) 160; (D) 172; (E) 184.

5*. (7баллов) Ten tennis balls have numbers written on them so that one ball is numbered “1”, two balls are numbered “2”, three balls are numbered “3”, and four balls are numbered “4”. The balls are placed in a bag and three balls are drawn at random and without replacement. What is the probability that the sum of the numbers on the balls drawn is divisible by 5?

На десяти теннисных мячах написаны номера, так что один мяч имеет номер «1», два мяча - номер «2», три мяча - номер «3», а четыре мяча - номер «4». Шары помещаются в сумку, и три шара выбираются случайным образом без замены. Какова вероятность того, что сумма чисел на этих шарах делится на 5?

Варианты ответов: (A) $\frac{1}{16}$; (B) $\frac{3}{40}$; (C) $\frac{1}{6}$; (D) $\frac{5}{24}$; (E) $\frac{1}{4}$.

6. (7 баллов) Сколькими способами можно разложить 8 одинаковых мячей по четырем различным ящикам, чтобы в четвертом ящике всегда оказывалось нечетное число мячей?

Варианты ответов: (A) 12; (B) 35; (C) 70; (D) 140; (E) 280.

7. (7 баллов) По двум прямолинейным шоссе к точке их пересечения начинают двигаться две машины. Известно, что

* Задача предложена преподавателями департамента математики Бард-колледжа (Нью-Йорк, США)

угол между направлениями движения этих машин равен 60° . Первая машина находится от места пересечения на расстоянии 60 км и движется с постоянной скоростью, равной 40 км/ч. Вторая машина находится от места пересечения на расстоянии 32 км и движется с постоянной скоростью 30 км/ч. Через какое время расстояние между машинами станет минимальным? (Проехав место пересечения шоссе, каждая машина движется дальше.)

Варианты ответов:

- (A) 1 ч. 20 мин.; (B) 1 ч. 24 мин.;
 (C) 1 ч. 28 мин.; (D) 1 ч. 32 мин.; (E) 1 ч. 42 мин.

8. (7 баллов) Сколько различных целочисленных решений имеет неравенство

$$|x| + |y| < 100?$$

Варианты ответов:

- (A) 18801; (B) 19404; (C) 1980; (D) 19801; (E) 20801.

9. (9 баллов) Все натуральные числа, начиная с единицы, выписаны подряд. Какая цифра стоит на 1990-м месте?

Варианты ответов: (A) 3; (B) 4; (C) 5; (D) 6; (E) 7.

10. (9 баллов) Сколько раз в течение суток часовая и минутная стрелки составляют прямой угол?

Варианты ответов: (A) 8; (B) 22; (C) 24; (D) 44; (E) 48.

11. (4 балла) Познакомимся с тремя людьми: Азаматом, Борисом и Болотом. Один из них аптекарь, другой - бухгалтер, третий - агроном. Один живет в Бишкеке, другой - в Баткене,

третий- в Андижане. Требуется выяснить, кто где живет и у кого какая профессия. Известно лишь, что:

- 1) Болот бывает в Бишкеке лишь наездами и то, весьма редко, хотя все его родственники постоянно живут в столице;
- 2) У двух из этих людей названия профессий и городов, в которых они живут, начинаются с той же буквы, что и их имена;
- 3) Жена аптекаря доводится Болоту младшей сестрой.

Отвечая на поставленные вопросы, заполните соответствующую таблицу в листе ответов.

12. (7 баллов) Лотерея. На каждой из десяти карточек написали по одному целому числу от 1 до 10. Карточки бросили в шляпу и попросили пять обладателей выигрышных билетов вытянуть по две карточки. К сожалению, при записи результатов лотереи произошла ошибка. В то время как один из членов тиражной комиссии называл вслух числа, стоявшие на извлеченных из шляпы карточках, другой член комиссии вместо самих чисел по ошибке записывал их сумму. Поэтому результаты в протоколе выглядели так: Эмиль – 11, Федор – 4, Хасан – 7, Медер – 16, Владимир – 17. Между тем каждый из пяти участников лотереи должен получить по два приза в соответствии с числами на вытасканных им карточках.

Установите, какие два числа выпали каждому участнику лотереи. Результаты Вашего анализа внесите в соответствующую таблицу листа ответов.

13. (9 баллов) Культурные развлечения. Вчера вечером

- 1) Андрей отправился на концерт
- 2) Борис провел все время с Ольгой
- 3) Чингиз так и не увиделся с Рахат
- 4) Перизат побывала в кино
- 5) Рахат посмотрела спектакль в театре
- 6) Какая-то пара посетила художественную выставку

Кроме тех, кого мы уже назвали, постоянными членами той же компании были Даниил и Щербет. Вместе с каждым юношей на том же виде культурных развлечений присутствовала одна девушка. Кто с кем был и где? Результаты Вашего анализа внесите в соответствующую таблицу листа ответов.

14.(9 баллов) Расследование. Произошла кража и было задержано трое подозреваемых. Один из них (вор) лжет систематически, другой (соучастник) иногда лжет, а иногда говорит правду; последний (подозреваемый напрасно) вообще никогда не лжет. Допзнание началось с вопросов о профессии для каждого из задержанных. Их ответы были такими.

Бертран: я маляр, Альфред - настройщик роялей, Шарль - декоратор.

Альфред: я врач, Шарль – страховой агент. Что касается Бертрана, то если вы его спросите, он ответит, что он маляр.

Шарль: Альфред настраивает рояли, Бертран – декоратор, а я страховой агент.

Судья, ведущий допрос, хотел бы знать профессию соучастника. Помогите ему. Ваш ответ запишите в соответствующем месте листа ответов.

15. (9 баллов) Кто разбил окно? Фарид, Дима, Леонид и Шерали играли на улице в футбол, как вдруг неудачно посланный мяч попал в окно. От удара стекло разбилось. Расспросы ребят позволили выяснить следующее (вот показания виновников происшествия):

Фарид: В окно попал не я. Это Шерали предложил играть в футбол на улице. Леонид не виноват.

Дима: Мячом в окно попал не я. Это сделал Леонид. Я умею играть в футбол лучше, чем Шерали.

Леонид: Последний удар по мячу нанес не я. Если бы я знал, чем все это кончится, ни за что бы не стал бы играть в футбол с ребятами. . Фарид не виноват.

Шерали: Окно разбил не я. Это сделал Леонид. Когда я пришел, игра была в полном разгаре.

Выяснилось, что каждый из ребят дал два правильных и одно ложное показание. Кто разбил окно? Ваш ответ запишите в соответствующем месте листа ответов.

**ВТОРОЙ ТУР**

[Пройти тест онлайн](#)

[Решение](#)

1. (1 балл) На чудо-дереве растут бананы и ананасы. За один раз с дерева срывается 2 плода. Если сорвать 2 банана или 2 ананаса, то вырастет еще 1 ананас. А если сорвать 1 банан и 1 ананас, то вырастет 1 банан. В итоге на дереве остался один плод. Что это за плод, если вначале на этом дереве было 12 бананов и 11 ананасов?
2. (2 балла) Из ста абитуриентов на первом экзамене получили хорошие и отличные оценки 80 человек, на втором экзамене – 72, а на третьем – 60 человек. Каким может быть наименьшее число абитуриентов, получивших хорошие и отличные оценки на всех трех экзаменах?
3. (3 балла) По двум прямолинейным шоссе к точке их пересечения с постоянными скоростями двигаются две машины. Известно, что в начальный момент времени расстояние между машинами было 20 км. Через 7 минут это расстояние составило 15 км, а еще через 4 минуты расстояние между машинами сократилось до 13 км. Через какое время (с момента начала движения) расстояние между машинами станет минимальным? Каким будет это расстояние?

4*. (4 балла) A cross-country racer runs a 10-mile race in 50 minutes. Prove that somewhere along the course the racer ran 2 miles in exactly 10 minutes.

Бегун пробежал 10-мильный забег по пересеченной местности за 50 минут. Докажите, что где-то по пути бегун пробежал 2 мили ровно за 10 минут.

5. (5 баллов) Два будильника показывают 12 часов дня. Первый спешит на 8 минут, второй отстает на 4 минуты в сутки. Через какое время они снова покажут одновременно 12 часов дня?

6*. (6 баллов) Let q be a positive rational number and define a sequence a_1, a_2, a_3, \dots by

$$a_1 = \sqrt{q}, a_2 = \sqrt{q + \sqrt{q}}, a_3 = \sqrt{q + \sqrt{q + \sqrt{q}}}, \dots$$

For which q does the sequence converge? Determine for which q the limit of the sequence is an integer.

Пусть q - положительное рациональное число, и определим последовательность a_1, a_2, a_3, \dots формулой

$$a_1 = \sqrt{q}, a_2 = \sqrt{q + \sqrt{q}}, a_3 = \sqrt{q + \sqrt{q + \sqrt{q}}}, \dots$$

Для какого q последовательность сходится? Определите, для какого q предел последовательности является целым числом.

7*. (6 баллов) For $x > 1$ determine the sum of the infinite series:

$$\frac{x}{x+1} + \frac{x^2}{(x+1)(x^2+1)} + \frac{x^4}{(x+1)(x^2+1)(x^4+1)} + \dots$$

* Задача предложена преподавателями департамента математики Бард-колледжа (Нью-Йорк, США)

Определите сумму бесконечного ряда для $x > 1$:

$$\frac{x}{x+1} + \frac{x^2}{(x+1)(x^2+1)} + \frac{x^4}{(x+1)(x^2+1)(x^4+1)} + \dots$$

8*. (8 баллов) Prove no six points of a square grid can form a regular hexagon.

Докажите, что шесть точек квадратной сетки не смогут сформировать правильный шестиугольник.

9.(5 баллов) Ужин. Три молодые супружеские пары собрались на дружеский ужин. Завязалась беседа. При этом были высказаны следующие утверждения:

- 1) Андрей: Каждый из присутствующих мужчин старше своей жены на 5 лет;
- 2) Ева: Не стану скрывать: я самая старшая из всех жен.
- 3) Ильяс: Нам с Бермет вместе 52 года.
- 4) Тимур: Всем шестерым вместе 151 год.
- 5) Бермет: Нам с Тимуром вместе 48 лет.

К сожалению, Марина так и не смогла принять участие в застольной беседе, поскольку она то и дело отлучалась на кухню. Тем не менее, можно определить не только возраст всех жен, но и всех мужей. Более того, можно даже выяснить, кто на ком женат. Как это сделать? Отвечая на поставленные вопросы, заполните следующую таблицу:

Номер супружеской пары	Имя мужа	Имя жены	Возраст мужа	Возраст жены
1				
2				
3				

10. (6 баллов) **Офицеры.** На одном вечере среди гостей оказалось пять офицеров: пехотинец, артиллерист, летчик, связист и сапер. Один из них был капитаном, трое – майорами и один – в звании подполковника. Из разговоров удалось выяснить следующее:

- 1) У Яна такое же звание, как и у его друга сапера;
- 2) Офицер-связист и Франц – большие друзья;
- 3) Офицер-летчик вместе с Борисом и Уланом недавно побывали в гостях у Франца;
- 4) Незадолго до званого вечера у артиллериста и сапера почти одновременно вышли из строя радиоприемники. Оба в один вечер обратились к Улану с просьбой зайти к ним и помочь связисту устранить неисправность и не ошиблись, поскольку с тех пор приемники у обоих работают отлично;
- 5) Франц чуть было не стал летчиком, но потом по совету своего друга сапера избрал иной род войск;
- 6) Ян по званию старше Улана, а Борис - старше Франца;
- 7) Пятый офицер, Антон, накануне вечера был в гостях у Улана.

Определите звание каждого офицера и род войск, в котором он служит. (Иерархия военных званий: майор - старше капитана, подполковник - старше майора). Результаты Вашего анализа внесите в следующую таблицу:

Имя офицера	Звание	Род войск
Борис		
Франц		
Ян		
Антон		
Улан		



МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА 2014

ПЕРВЫЙ ТУР

[Пройти тест онлайн](#)

[Решение](#)

1. (5 баллов) Работая вместе, Амина, Дима и Рузиали могут нарезать морковь для плова за 9 минут. Если эту работу будет выполнять один из них, то Амина может выполнить ее за 18 минут, Рузиали — за 22 минуты. За какое время может нарезать морковь Дима?

Варианты ответов: (A) 95; (B) 97; (C) 99; (D) 103; (E) 105.

2. (5 баллов) Решить следующую систему уравнений и записать сумму этих решений:

$$\frac{xy}{x+y} = \frac{8}{3}, \quad \frac{yz}{y+z} = \frac{12}{5}, \quad \frac{xz}{x+z} = \frac{24}{7}.$$

Варианты ответов: (A) 10; (B) 12; (C) 14; (D) 16; (E) 18.

3. (7 баллов) Найти максимальное вещественное число K , для которого существуют решения неравенства:

$$\sqrt{x-3} + \sqrt{6-x} \geq K.$$

Варианты ответов:

(A) $\sqrt{6} - \sqrt{3}$; (B) $\sqrt{3}$; (C) $\sqrt{6}$; (D) $2\sqrt{3}$; (E) $\sqrt{6} + \sqrt{3}$.

4. (7 баллов) Найдите площадь треугольника, в котором две медианы взаимно перпендикулярны и равны 18 и 24.

Варианты ответов:

(A) 168; (B) 216; (C) 288; (D) 324; (E) 432.

5. (8 баллов) Сколькими способами можно разменять купюру в 20 сомов монетами достоинством в 1, 3 и 5 сомов?

Варианты ответов: (A) 12; (B) 16; (C) 18; (D) 20; (E) 24.

6. (8 баллов) Город имеет вид прямоугольника, разделенного улицами на квадраты. Таких квадратов в направлении север-юг 5, а в направлении восток-запад 7. Сколько различных кратчайших дорог связывают одну из вершин прямоугольника с противоположной?

Варианты ответов: (A) 788; (B) 790; (C) 792; (D) 794; (E) 796.

7. (8 баллов) Сколькими способами множество, состоящее из 10 различных предметов, можно разделить на два непересекающихся непустых подмножества?

Варианты ответов:

(A) 123; (B) 259; (C) 385; (D) 511; (E) 637.

8. (8 баллов) Найти наименьшее значение функции:

$$f(x) = |x - 1| + |x + 1| + |x - 2|.$$

Варианты ответов:

(A) 2; (B) 3; (C) 4; (D) 5; (E) 6.

9. (8 баллов) Для нумерации страниц словаря потребовалось 2322 цифры. Сколько страниц содержит этот словарь?

Варианты ответов: (A) 810; (B) 812; (C) 814; (D) 816; (E) 818.

События следующих задач происходят на острове, заселенном рыцарями и лжецами. Как водится, рыцари всегда говорят правду, а лжецы всегда лгут. Ваша задача – ловить на острове заезжих шпионов. Шпионы – нормальные люди, которые могут лгать или говорить правду, в зависимости от своей выгоды.

10. (5 баллов) На острове были арестованы три человека - A , B , C . Следователям известно, что один из них рыцарь, один лжец и один шпион. Во время расследования они сделали следующие заявления:

A : C – лжец; B : A – рыцарь; C : Я шпион.

Так кто же из троих шпион, кто рыцарь и кто лжец?

Варианты ответов:

- a) A - рыцарь, B - лжец, C – шпион;
- b) A - рыцарь, B - шпион, C – лжец;
- c) A - лжец, B - рыцарь, C – шпион;
- d) A - лжец, B - шпион, C – рыцарь;
- e) A - шпион, B - лжец, C – рыцарь;
- f) A - шпион, B - рыцарь, C – лжец.

11. (5 баллов) На острове снова задержали подозрительного человека. Во время разбирательства он сделал ложное и очень глупое заявление, которое тут же изобличило его как шпиона. Что это было за заявление?

Варианты ответов: a) Я не шпион; b) Я рыцарь; c) Я лжец.

12. (5 баллов) На острове опять задержали подозрительного человека. На допросе он сделал истинное и очень глупое заявление, и был тут же разоблачен. Что он сказал?

Варианты ответов: а) Я не лжец; б) Я не рыцарь; с) Я шпион.

13. (7 баллов) На острове задержаны три человека – A , B , C . Следователи располагают точной информацией, что один из них рыцарь, один лжец и один шпион. На допросе A заявил: «Я не шпион». B заявил: «Я шпион». Тогда C спросили: « B действительно шпион?» На самом деле шпионом был C и он дал очень ловкий ответ, с помощью которого избежал разоблачения. Что это был за ответ?

Варианты ответов: а) «Да»; б) «Нет».

14. (7 баллов) На остров проник знаменитый шпион – Джеймс Бонд. Но, несмотря на весь опыт, он был арестован вместе с двумя коренными жителями острова – рыцарем и лжецом. Давайте снова обозначим всех троих A , B , C . Из всех троих только шпиона зовут Джеймс. На суде обвиняемые дали следующие показания:

A : Меня зовут Джеймс; B : Это правда; C : Джеймс – это я.
Кто из них кто?

Варианты ответов:

- а) A - рыцарь, B - лжец, C – шпион;
- б) A - рыцарь, B - шпион, C – лжец;
- с) A - лжец, B - рыцарь, C – шпион;
- д) A - лжец, B - шпион, C – рыцарь;
- е) A - шпион, B - лжец, C – рыцарь;
- ф) A - шпион, B - рыцарь, C – лжец.

15. (7 баллов) Джеймс Бонд был посажен в тюрьму, но сумел бежать, и, изменив внешность, снова занялся шпионажем. Но и на этот раз он был арестован вместе с рыцарем и лжецом. Как

и в прошлой задаче, только шпиона зовут Джеймс. Все трое (как всегда A , B , C) предстали перед судом и дали следующие показания:

A : Меня зовут Джеймс; B : Это правда; C : Я не Джеймс.
Кто из них кто?

Варианты ответов: а) A - рыцарь, B - лжец, C – шпион;

б) A - рыцарь, B - шпион, C – лжец;

с) A - лжец, B - рыцарь, C – шпион;

д) A - лжец, B - шпион, C – рыцарь;

е) A - шпион, B - лжец, C – рыцарь;

ф) A - шпион, B - рыцарь, C – лжец.

ВТОРОЙ ТУР

[Пройти тест онлайн](#)[Решение](#)

1. (8 баллов) Имеются два одинаковых ящика кубической формы заполненные шарами, сделанными из одного и того же материала. Шары уложены вплотную друг к другу и до самого верха. В первом ящике шары большие, а во втором – в три раза меньшего диаметра. Какой из ящиков тяжелее?
2. (8 баллов) Докажите, что среди любых шести человек найдутся либо трое попарно незнакомых друг с другом, либо трое попарно знакомых.
3. (10 баллов) На классной доске написаны числа $1, 2, 3, \dots, 2014$. На каждом шаге стираем два числа и вместо них пишем их сумму или разность. Понятно, что после достаточного количества шагов на доске останется одно число. Докажите, что это число не может быть двойкой.
4. (10 баллов) Петя с мамой играют в следующую игру: Петя называет маме некоторое число A , мама называет Пете число B , причем число A -двузначное и не содержит одинаковых цифр; число B -двузначное. Затем Петя начинает прибавлять к своему числу число B , т.е. получает суммы $A+B$; $A+2B$; $A+3B$ и т.д. Если на некотором шаге Петя получает число, две последовательные цифры которого одинаковые, то он

выиграл. Если - нет, то выиграла мама. Сможет ли мама всегда выигрывать в эту игру? (т.е. для любого числа A , названного Петей, найти некоторое число B , обеспечивающее выигрыш).

5. (10 баллов) На плоскости дан прямоугольник со сторонами 1 и 3. Найти площадь минимального квадрата, покрывающего этот прямоугольник (т.е., когда любая точка прямоугольника лежит внутри квадрата).

6. (12 баллов) Докажите, что для любого целого положительного n

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \dots + n)^2.$$

7. (12 баллов) Натуральное число будем называть «счастливым», если сумма всех его цифр равна 7. Перенумеруем все «счастливые» числа в порядке их возрастания. Какой номер в этой последовательности будет у числа 2014?

События следующих задач происходит на острове, заселенном рыцарями и лжецами. Как водится, рыцари всегда говорят правду, а лжецы всегда лгут. И опять, шпиономания. Шпионы – нормальные люди, которые могут лгать или говорить правду, в зависимости от своей выгоды.

8. (10 баллов) На этот раз перед судом предстали трое обвиняемых A , B , C . Известно, что один из них рыцарь, один лжец и один шпион. На суде события развивались так: A заявил B , что он шпион. B обвинил C в том, что он шпион. После чего C , указав то ли на A , то ли на B , заявил: «На самом деле шпион – это он». После этого суд смог изобличить шпиона. Обратите внимание, что суд знал, на кого указывал C , просто это

неизвестно Вам. Так кто из них кто был на самом деле?
Выберите правильный ответ и объясните свой выбор:

- a) A - рыцарь, B - лжец, C - шпион
- b) A - рыцарь, B - шпион, C - лжец
- c) A - лжец, B - рыцарь, C - шпион
- d) A - лжец, B - шпион, C - рыцарь
- e) A - шпион, B - лжец, C - рыцарь
- f) A - шпион, B - рыцарь, C - лжец

9. (10 баллов) Вот информация об еще одном запутанном деле о шпионаже на острове. Снова три подсудимых A , B , C , и снова известно, что один из них рыцарь, один лжец и один шпион.

На суде судья спросил подсудимого A : «Вы шпион?». A ответил односложно (то ли «Да», то ли «Нет»). Затем судья спросил B : « A сказал правду?». B ответил односложно (то ли «Да», то ли «Нет»). В этот момент A заявил: « C не шпион». Судья закричал: «Я и раньше это знал, а теперь я знаю точно, кто из них шпион!» и избил шпиона. Под словами «Я и раньше это знал» судья имел в виду "вывел путем логических умозаключений из показаний A и B ". Определите, кто из них был кто на самом деле? Выберите правильный ответ и объясните свой выбор:

- a) A - рыцарь, B - лжец, C - шпион
- b) A - рыцарь, B - шпион, C - лжец
- c) A - лжец, B - рыцарь, C - шпион
- d) A - лжец, B - шпион, C - рыцарь
- e) A - шпион, B - лжец, C - рыцарь
- f) A - шпион, B - рыцарь, C - лжец

10. (10 баллов) А вот информация о самом запутанном деле на острове. В этом деле было три подсудимых A , B , C , и было известно, что один из них рыцарь, один лжец и один шпион. Открывая заседание, судья заявил: «Сейчас я задам серию вопросов. На каждый вопрос необходимо отвечать только «Да» или «Нет». Как только мне станет ясно, кто шпион, я изобличу его и остановлю процесс. Как только станет ясно, что кто-то из вас не шпион, я тут же отпущу невиновного, не дожидаясь конца процесса».

Затем судья обратился к A : «Вы шпион?». A ответил.

Затем судья спросил B : «Правду ли сказал A ?». B ответил.

После этого судья немного подумал и спросил C : «Вы шпион?». C ответил и судья тут же изобличил шпиона. Кто был шпионом? Выберите правильный ответ и объясните свой выбор:

а) A ; б) B ; в) C .

11. (10 баллов) Даны первые пять членов числовой последовательности:

66, 26, 1216, 11121116, 31123116.

Кроме того, известно, что седьмой ее член равен 11131221121113122116. Каждый член этой последовательности определяется предыдущим ее членом в соответствии с некоторым правилом. Найдите это правило и определите шестой и восьмой члены последовательности.



МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА 2015

ПЕРВЫЙ ТУР

[Пройти тест онлайн](#)

Решение

1. Железнодорожный состав длиной в 1 км проходит мимо столба за 1 минуту, на той же скорости проходит через туннель за 5 минут. Какова длина туннеля?

Варианты ответов: (a) 2; (b) 3; (c) 4; (d) 5; (e) 6.

2. На дне рождения были дети 7, 8, 9, 10 и 11 лет - всего 14 человек. Пятерым было по 10 лет, но больше всего было 11-летних. Найдите суммарный возраст этих 14 детей.

Варианты ответов: (a) 138; (b) 140; (c) 142; (d) 143; (e) 151.

3. Из города А в город В вышли Садык и Толя. В то же время, навстречу им из города В вышла Олеся. Все они двигались с постоянными скоростями. Через 2 часа Олеся встретила Садыка, еще через час – Толю, а еще через 3 часа она пришла в город А. Во сколько раз быстрее Толи шел Садык?

Варианты ответов: (a) 1,5; (b) 2; (c) 2,5; (d) 3; (e) 3,5.

4. Том и Гек, работая вместе, могут покрасить забор за 2 часа. Производительность труда Тома в 2 раза больше, чем у Гека. За сколько часов они покрасят забор, если Гек сменил Тома после того, как тот покрасит третью часть забора?

Варианты ответов: (a) 3; (b) 4; (c) 5; (d) 6; (e) 7.

5. Масса фруктов после сушки уменьшилась в два раза. На сколько процентов изменилась влажность фруктов, если до сушки она была равна 80%?

Варианты ответов: (a) 32,5; (b) 42,5; (c) 52,5; (d) 62,5; (e) 72,5.

6. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x^3 + y^3 = 2, \\ (x + y)xy = 2, \end{cases}$$

в ответе записать разность: $x - y$.

Варианты ответов: (a) 0; (b) 1; (c) 2; (d) 3 (e) 4.

7. В контейнере находятся изделия двух видов. Стоимость и вес одного изделия составляют: \$40 и 52 кг – для изделий первого вида, \$60 и 39 кг для изделий второго вида. Общий вес изделий равен 1391 кг. Определите минимально возможную стоимость изделий, находящихся в контейнере.

Варианты ответов: (a) 798; (b) 1070; (c) 1090; (d) 1100; (e) 1110.

8. На плоскости лежит прямоугольник со сторонами 616 и 209. Внутри прямоугольника нарисована сетка с квадратными ячейками стороны которых равны 1. Сколько узлов этой сетки лежит на диагонали прямоугольника, если под узлом мы понимаем общую вершину четырех ячеек сетки?

Варианты ответов: (a) 6; (b) 7; (c) 8; (d) 9; (e) 10.

9. Сколькими способами 10 яблок можно раздать трем девочкам: Адели, Каныкей и Санире, и при этом удовлетворить следующим условиям: Адель и Каныкей должны получить хотя бы по одному яблоку, а Санира, не меньше двух; кроме того, у Каныкей должно, в итоге, оказаться не больше трех яблок.

Варианты ответов: (a) 10; (b) 13; (c) 16; (d) 18; (e) 21.

10. Сколько решений имеет уравнение

$$100 \cdot \sin x = x?$$

Варианты ответов: (a) 59; (b) 61; (c) 63; (d) 64; (e) 66.

Вы находитесь на удивительном острове, все обитатели этого острова никогда не высказывают никаких утверждений; они лишь задают вопросы, причем, только те вопросы, на которые можно ответить только «да» или «нет». Каждый из обитателей острова относится к одному из двух типов – типу *A* или типу *B*. Обитатели типа *A* задают только такие вопросы, правильным ответом на которые является «да». Обитатели типа *B*, задают лишь те вопросы, на которые правильным ответом является «нет». Например, житель типа *A* может спросить: «Равняется ли два плюс два четырем?» Но он никак не может спросить, например, равняется ли два плюс два шести.

11. Вы встречаете жителя этого острова, и он спрашивает Вас: «Принадлежу ли я к типу *A*?». Какой вывод Вы можете из этого сделать?

Варианты ответов:

- (a) Житель относится к типу *A*,
- (b) Житель относится к типу *B*,
- (c) Невозможно определить тип жителя.

12. Вы встречаете супружескую пару – Виктора и Анну. Случайно Вы слышите, как Виктор спросил кого-то: «Относимся ли мы с Анной к типу *B*?». К какому типу относится каждый из супругов?

Варианты ответов:

- (a) Виктор – *A*, Анна – *A*;
- (b) Виктор – *B*, Анна – *B*;

(с) Виктор – B , Анна – A ; (d) Виктор – A , Анна – B .

13. Вы встречаете двух братьев, которых звали Артур и Роберт, и слышите, как Артур спрашивает Роберта: «Принадлежит ли по крайней мере один из нас к типу B ?». К какому типу относится каждый из братьев?

Варианты ответов:

(a) Артур – A , Роберт – A ; (b) Артур – B , Роберт – B ;
(с) Артур – B , Роберт – A ; (d) Артур – A , Роберт – B .

14. Вы встречаете на острове супружескую пару по фамилии Гордон. Мистер Гордон спрашивает свою жену: «Дорогая, относимся ли мы с тобой к людям разного типа?». Что можно сказать по поводу каждого из супругов?

Варианты ответов: Отметьте правильные ответы крестиком в следующей таблице

	Тип A	Тип B	Невозможно определить тип
Мистер Гордон			
Миссис Гордон			

15. На острове Вы сталкиваетесь с островитянином, который спрашивает Вас: - Принадлежу ли я к людям того типа, которые могли бы задать вопрос, что я сейчас задаю? Какое можно сделать заключение относительно этого островитянина?

Варианты ответов:

(a) Это житель типа A ; (b) Это житель типа B ;
(с) Тип жителя невозможно определить.

ВТОРОЙ ТУР

[Пройти тест онлайн](#)
[Решение](#)

1. На книжной полке стоят рядом два тома учебника «Введение в математический анализ». Страницы каждого тома имеют вместе толщину 2 см, а обложка (каждая) 2 мм. Червь прогрыз (перпендикулярно страницам) от первой страницы первого тома до последней страницы второго тома. Путь какой длины он прогрыз?

2. Гусеница хочет проползти из одного угла, находящегося на полу кубической комнаты, в противоположный (по диагонали куба) угол на потолке. Найти кратчайший для такого путешествия путь по стенам комнаты.

3. Решить уравнение:

$$2\sqrt[3]{(x+1)^2} + 2\sqrt[3]{(x-1)^2} = 5\sqrt[3]{x^2-1}$$

4. Даны арифметическая прогрессия $a_0, a_1, \dots, a_n, \dots$ и геометрическая прогрессия $b_0, b_1, \dots, b_n, \dots$. Обе прогрессии составлены из положительных чисел, причем выполняются соотношения: $a_0 = b_0$, $a_1 = b_1$. Доказать, что $a_n \leq b_n$ при $n \geq 2$.

5. Доказать, что дискриминант квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$ с целыми коэффициентами не может быть равным 2015.

6. Плоскость покрыта сеткой с квадратными ячейками стороны которых равны 1. Докажите, или опровергните следующее утверждение: «существует равносторонний треугольник с вершинами в узлах вышеуказанной сетки».

7. Что больше: $\sin(\cos x)$ или $\cos(\sin x)$? Обоснуйте Ваш ответ.

Вы по прежнему находитесь на удивительном острове, где все обитатели этого острова никогда не высказывают никаких утверждений; они лишь задают вопросы, причем, только те вопросы, на которые можно ответить только «да» или «нет». Каждый из обитателей острова относится к одному из двух типов – типу A или типу B . Обитатели типа A задают только такие вопросы, правильным ответом на которые является «да». Обитатели типа B , задают лишь те вопросы, на которые правильным ответом является «нет». Например, житель типа A может спросить: «Равняется ли два плюс два четырем?», но он никак не может спросить, например, равняется ли два плюс два шести.

В этом туре помимо выбора правильного ответа Вы должны написать, почему Вы сделали такой выбор.

8. Вы встречаете на острове островитянина и он спрашивает Вас: «Отношусь ли я к людям того типа, которые могли бы спросить, принадлежу ли я к типу B ?». Какой вывод можно сделать по поводу этого человека?

Варианты ответов:

- (a) Это житель типа A ; (b) Это житель типа B ;
 (c) Эта ситуация невозможна.

9. Вы встречаетесь на острове с супружеской парой по фамилии Смит. Миссис Смит спрашивает своего мужа: «Относишься ли ты к людям того типа, которые могли бы спросить меня, принадлежу ли я к типу A ?». Какой вывод можно сделать по поводу мистера и миссис Смит?

Варианты ответов: Отметьте правильные ответы крестиком в следующей таблице

	Тип A	Тип B	Невозможно определить тип
Мистер Смит			
Миссис Смит			

10. Вы встречаете супругов Джона и Бетти. Бетти спрашивает своего мужа: «Относишься ли ты к людям того типа, которые могли бы спросить, принадлежит ли по крайней мере один из нас к типу B ?». К какому типу принадлежат Джон и Бетти?

Варианты ответов: Отметьте правильные ответы крестиком в следующей таблице

	Тип A	Тип B	Невозможно определить тип
Джон			
Бетти			



МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА 2016

ПЕРВЫЙ ТУР

[Пройти тест онлайн](#)

[Решение](#)

1. Средний возраст жителей города A равен 32 года, а средний возраст жителей города B равен 45 лет. Одна тысяча жителей города A переселилась в город B . После этого средний возраст жителей в каждом городе уменьшился на два года. Каково общее число жителей в двух городах A и B .

Варианты ответов:

(a) 6500; (b) 7000; (c) 7500; (d) 8000; (e) 8500.

2. Четырехзначное число заканчивается цифрой 6. Эту цифру переставили в начало числа. Полученное число оказалось на 4239 больше исходного. Какова сумма цифр исходного числа?

Варианты ответов:

(a) 21; (b) 22; (c) 23; (d) 24; (e) 25.

3. Катер, плывя вверх по реке, потерял под мостом буй. Обнаружив потерю через 10 минут, он повернул обратно и нагнал буй на расстоянии 1 км от моста. Определите скорость течения реки (в км/час).

Варианты ответов:

(a) 2,5; (b) 3; (c) 3,5; (d) 4; (e) 4,5.

4. Заряда аккумулятора мобильного телефона Бакыта хватает либо на 10 часов разговора и прослушивания музыки, либо на 190 часов ожидания. Когда Бакыт садился в поезд, его телефон был полностью заряжен и полностью разряжен, когда он выходил из поезда. Известно, что Бакыт говорил по телефону и слушал музыку ровно половину времени поездки, а остальное время телефон находился в режиме ожидания. Какова была продолжительность поездки Бакыта?

Варианты ответов:

(a) 16; (b) 17; (c) 18; (d) 19; (e) 20.

5. Влажность фруктов после сушки стала 10%, при этом масса фруктов уменьшилась на 25%. Какова была влажность фруктов перед сушкой?

Варианты ответов:

(a) 30; (b) 31,5; (c) 32,5; (d) 33,5; (e) 35.

6. Найти наименьшее значение функции:

$$f(x) = |x-1| + |x+2| + |x-3|.$$

Варианты ответов:

(a) 2; (b) 3; (c) 4; (d) 5; (e) 7.

7. Функция $f(x)$ удовлетворяет соотношению $2f(x) + f(x^2 - 1) = 2016$ при всех действительных значениях x . Найти величину $f(\sqrt{2})$

Варианты ответов:

(a) 608; (b) 624; (c) 640; (d) 656; (e) 672.

8. Кусок мыла имеет форму параллелепипеда. Таалай заметил, что после 38 дней регулярного использования, каждое ребро этого параллелепипеда уменьшилось на треть первоначальной длины. На сколько дней ему хватит оставшегося куска мыла?

Варианты ответов:

(a) 10; (b) 12; (c) 14; (d) 16; (e) 18.

9. Над цепью озер летела стая белых лебедей. На каждом озере садилась половина лебедей и еще пол лебедя, а остальные летели дальше. Все лебеди сели на семи озерах. Сколько лебедей было в стае?

Варианты ответов: (a) 126; (b) 127; (c) 128; (d) 130; (e) 132.

10. Сколькими способами девять яблок могут быть распределены между тремя школьниками Бексултаном, Равшаном и Вячеславом, при условии, что Бексултан должен получить не более чем четыре яблока, а Равшан – не менее двух?

Варианты ответов: (a) 18; (b) 22; (c) 26; (d) 30; (e) 34.

Предположим, что вы находитесь в лесу, каждый обитатель которого либо рыцарь, либо лжец. (Как всегда в логических задачах, рыцари всегда говорят правду, а лжецы всегда лгут.) Кроме того, в лесу водятся оборотни, которые иногда превращаются в волков и нападают на людей. Оборотень может быть либо рыцарем, либо лжецом.

11. Вы берете интервью у трех обитателей леса *A*, *B*, *C*. Известно, что ровно один из них оборотень. В беседе с вами они заявляют:

A: *C* - оборотень.

B: Я не оборотень.

C: По меньшей мере двое из нас лжецы.

Если бы вам предстояло выбрать одного из трех обитателей леса в попутчики и вопрос о том, не окажется ли ваш товарищ оборотнем, волновал бы вас сильнее, чем вопрос, не окажется ли он лжецом, то на ком из трех вы бы остановили свой выбор?

Варианты ответов: (a) *A*, (b) *B*, (c) *C*.

12. Вы снова берете интервью у трех обитателей леса *A*, *B* и *C*. Известно, что каждый из них либо рыцарь, либо лжец и среди них имеется ровно один оборотень. В беседе с вами они заявляют:

A: Я оборотень.

B: Я оборотень.

C: Не более чем один из нас рыцарь.

Проведите полную классификацию *A*, *B* и *C*: отметьте правильные ответы крестиком в следующей таблице.

(Крестик в таблице значит «Да», пустая ячейка - «Нет»)

	Рыцарь	Лжец	Оборотень
<i>A</i>			
<i>B</i>			
<i>C</i>			

В трех следующих задачах мы снова встречаем трех обитателей леса *A*, *B*, *C*, каждый из которых либо рыцарь, либо лжец. Заявления делают только двое из них: *A* и *B*. В их высказываниях слово "нас" относится ко всем трем героям (*A*, *B* и *C*), а не только к *A* и *B*.

13. Предположим, что A и B заявили следующее:

A : По меньшей мере один из нас рыцарь.

B : По меньшей мере один из нас лжец.

Известно, что по меньшей мере один из них оборотень и ни один не является одновременно рыцарем и оборотнем. Кто оборотень?

Варианты ответов: (a) A , (b) B , (c) C .

14. На этот раз A и B сделали следующие заявления:

A : По меньшей мере один из нас лжец.

B : C - рыцарь.

Известно, что ровно один из них оборотень и что он рыцарь. Кто оборотень?

Варианты ответов: (a) A , (b) B , (c) C .

15. В этой задаче A и B заявили следующее:

A : По меньшей мере один из нас лжец.

B : C - оборотень.

И в этой задаче известно, что ровно один из них оборотень и что он рыцарь. Кто оборотень?

Варианты ответов: (a) A , (b) B , (c) C .

ВТОРОЙ ТУР

[Пройти тест онлайн](#)[Решение](#)

1. Гриб называется *плохим*, если в нем не менее 10 червей. В лукошке 91 плохой гриб и 10 хороших. Может ли так случиться, что после того, как некоторые червяки переползут на другие грибы, все грибы станут хорошими?

2. Найдите все целые решения уравнения

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{3}.$$

3. В шахматном турнире каждый шахматист половину своих очков набрал в играх с участниками, занявшими три последних места. Сколько человек приняло участие в турнире?

4. Тренер Модернов попарно взвесил своих спортсменов во всех возможных сочетаниях и обнаружил удивительный факт: полученные числа образуют арифметическую прогрессию: 130; 130,4; 130,8; ... ; 144. Чему равен общий вес этих спортсменов?

5. На десяти теннисных мячах написаны номера: на одном – номер «1», на двух – номер «2», на трех – номер «3», четыре мяча помечены номером «4». Мячи лежат в сумке, из которой случайным образом вынули три мяча. Какова вероятность

того, что сумма номеров на вынутых мячах будет делиться на 5?

6. Решить уравнение $13 \cdot [x] - 61 \cdot \{x\} = 0$. Здесь: $[x]$ -целая часть числа x , т.е. наибольшее целое число, не превосходящее x ; $\{x\}$ - дробная часть числа x , т.е. $x - [x]$.

7. В каждом из двух сосудов находится по A литров воды. Из первого сосуда переливают половину имеющейся в нем воды во второй, затем из второго переливают треть имеющейся в нем воды обратно в первый, затем из первого переливают четверть имеющейся в нем воды во второй и т.д. Сколько воды окажется в каждом из сосудов после 100 переливаний?

В этом туре помимо выбора правильного ответа вы должны написать, почему вы сделали такой выбор.

8. Владелец магазина сообщил по телефону в полицию о том, что его ограбили. Трех преступников-рецидивистов A , B и C , проживающих в том районе, немедленно вызвали на допрос. Установлено следующее:

- 1) Каждый из тройки A , B и C в день ограбления побывал в магазине, и никто больше в тот день в магазин не заходил.
- 2) Если A виновен, то у него был ровно один сообщник.
- 3) Если B не виновен, то C также не виновен.
- 4) Если виновны ровно двое подозреваемых, то A - один из них.
- 5) Если C не виновен, то B также не виновен.

Что вы думаете по поводу виновности каждого из них?

	Виновен? (Да/Нет)
<i>A</i>	
<i>B</i>	
<i>C</i>	

9. По обвинению в ограблении перед судом предстали *A*, *B* и *C*. Установлено следующее:

- 1) По меньшей мере один из трех подсудимых виновен.
- 2) Если *A* виновен и *B* не виновен, то *C* виновен.

Этих данных недостаточно, чтобы доказать виновность каждого из трех подсудимых в отдельности, но эти же данные позволяют отобрать двух подсудимых, о которых известно, что один из них заведомо виновен. О каких двух подсудимых идет речь?

Варианты ответов: 1) *A*, *B*; 2) *A*, *C*; 3) *B*, *C*.

10. Подсудимых четверо: *A*, *B*, *C*, *D*. Установлено следующее:

- 1) Если *A* и *B* оба виновны, то *C* был соучастником.
- 2) Если *A* виновен, то по меньшей мере один из обвиняемых *B*, *C* был соучастником.
- 3) Если *C* виновен, то *D* был соучастником.
- 4) Если *A* не виновен, то *D* виновен.

Что вы думаете об этом случае?

Отметьте правильные ответы крестиком в следующей таблице. (Крестик в таблице значит «Да», пустая ячейка - «Нет»)

	Виновен	Не виновен	Невозможно определить
<i>A</i>			
<i>B</i>			
<i>C</i>			
<i>D</i>			



МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА 2017

ПЕРВЫЙ ТУР

[Пройти тест онлайн](#)

[Решение](#)

1. Имеется 100 маленьких кубиков с ребром 2 см. Из них сооружается самый большой из возможных кубов. Сколько маленьких кубиков останутся неиспользованными?

Варианты ответов:

(a) 16; (b) 21; (c) 25; (d) 32; (e) 36; (f) 45; (g) 49.

2. В два сосуда налили одинаковое количество жидкости. В итоге, первый заполнен на четверть, второй на треть. Какая часть второго сосуда будет заполнена, если в него перелить всю жидкость из первого сосуда?

Варианты ответов:

(a) $\frac{3}{8}$; (b) $\frac{4}{9}$; (c) $\frac{5}{9}$; (d) $\frac{6}{9}$; (e) $\frac{7}{9}$; (f) $\frac{7}{8}$; (g) $\frac{8}{9}$.

3. Катер, плывя вниз по реке, потерял под мостом буй. Обнаружив потерю через 15 минут, он повернул обратно и встретил буй на расстоянии 1 км от моста. Определите скорость течения реки (в км/час).

Варианты ответов:

(a) 1,5; (b) 1,75; (c) 2; (d) 2,5; (e) 3; (f) 3,25; (g) 3,5.

4. Том и Гек красят забор: Гек сменил Тома после того, как тот покрасил третью часть забора, и вся работа была ими выполнена за 10 часов. За сколько часов они покрасят забор, работая вместе, если производительность труда Тома в полтора раза больше, чем у Гека?

Варианты ответов:

(a) 1; (b) 1,5; (c) 2; (d) 2,5; (e) 3; (f) 3,5; (g) 4.

5. Влажность фруктов после сушки стала 50%, при этом количество воды в фруктах сократилось в 5 раз. Во сколько раз уменьшилась масса этих фруктов?

Варианты ответов:

(a) 2; (b) 2,5; (c) 3; (d) 3,5; (e) 4; (f) 4,5; (g) 5.

6. Сколькими способами можно разменять купюру в 20 сомов монетами достоинством в 1, 3 и 5 сомов, при условии, что в каждом таком размене должна присутствовать хотя бы одна монета 3 сома?

Варианты ответов:

(a) 10; (b) 11; (c) 12; (d) 14; (e) 15; (f) 18; (g) 20.

7. Сколькими способами множество, состоящее из 11 различных предметов, можно разделить на два непересекающихся непустых подмножества?

Варианты ответов:

(a) 127; (b) 189; (c) 251; (d) 511; (e) 767; (f) 1023; (g) 2047.

8. Плоскость покрыта сеткой квадратов со стороной, равной 1. Сколько узлов этой сетки попадают в круг (включая его границу) радиуса 5 с центром в произвольном узле?

Варианты ответов:

(a) 65; (b) 71; (c) 75; (d) 81; (e) 85; (f) 91; (g) 95.

9. Все положительные целые числа, начиная с единицы, выписаны подряд в порядке возрастания. Какая цифра стоит на 2017 месте?

Варианты ответов:

(a) 0; (b) 1; (c) 2; (d) 3; (e) 5; (f) 7; (g) 9.

10. Сколько решений имеет уравнение

$$|\sin(\pi x)| = \lg|x| ?$$

Варианты ответов:

(a) 2; (b) 8; (c) 16; (d) 20; (e) 24; (f) 30; (g) 36.

Задачи 11-15 решаются при следующих предположениях. Предположим, что вы находитесь в Лесу Забывчивости. В этом особом месте постоянно забываются самые простые вещи, вроде дня недели. Кроме того, обитатели Леса тоже очень своеобразные создания. Например, здесь можно встретить Льва и Единорога. Лев лжет по понедельникам, вторникам и средам, а в остальные дни недели говорит правду. Единорог лжет по четвергам, пятницам и субботам и говорит правду во все остальные дни. Есть здесь и два брата-близнеца, Труляля и Траляля, неотличимые друг от друга. Один из них ведет себя точно также как Лев (то есть лжет по понедельникам, вторникам и средам и говорит правду в остальные дни), а другой как Единорог (то есть лжет по четвергам, пятницам и субботам и говорит правду в остальные дни).

11. Вы встречаете Льва и Единорога и в разговоре с Вами они высказывают следующие утверждения:

Лев: Вчера был один из тех дней, когда я лгу.

Единорог: Вчера был один из тех дней, когда я тоже лгу.

Поскольку Вы опять забыли текущий день недели, Вам надо определить его из этих высказываний и отметить крестиком в таблице.

Пн	Вт	Ср	Чт	Пт	Сб	Вс

12. В другой раз Вы встречаете одного Льва. Он делает следующие высказывания:

1. Я лгал вчера.
2. После завтрашнего дня я буду лгать два дня подряд.

Отметьте крестиком в таблице, в какой день недели это было.

Пн	Вт	Ср	Чт	Пт	Сб	Вс

13. Отметьте крестиком в таблице дни недели, когда Лев может произнести следующие высказывания:

1. Я лгал вчера.
2. Я буду лгать завтра

Если таких дней нет, оставьте таблицу пустой.

Пн	Вт	Ср	Чт	Пт	Сб	Вс

14. Отметьте крестиком в таблице дни недели, когда Лев может высказать следующее единое утверждение «Я лгал вчера и я буду лгать завтра», если такие дни вообще есть, иначе оставьте таблицу пустой.

Пн	Вт	Ср	Чт	Пт	Сб	Вс

15. Вы встречаете обоих братьев вместе и они делают следующие высказывания:

Первый: Я Траляля.

Второй: Я Труляля.

Кто из них в действительности был Траляля и Труляля.

Варианты ответов: (а) Первый – Траляля, второй – Труляля.

(б) Первый – Труляля, второй – Траляля.



МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА 2017

ВОРОЙ ТУР

[Пройти тест онлайн](#)

[Решение](#)

1. Коля и Вася живут в одном доме, на каждом этаже которого расположены 4 квартиры. Коля живет на пятом этаже в квартире 82, а Вася – на третьем этаже в квартире номер 171. Сколько этажей в доме?
2. Считается, что ученик А учится лучше ученика В, если в большинстве контрольных работ оценка А выше, чем оценка В. Оказалось, что А учится лучше, чем В, В – лучше, чем С, а С – лучше, чем А. Приведите пример, когда такое возможно.
3. Две прогрессии – арифметическая и геометрическая – имеют по три члена. Первый и последний члены одной прогрессии, соответственно, равны первому и последнему членам другой. Сумма членов какой прогрессии больше?
4. Сколькими способами можно рассадить в один ряд 3-х юношей и 4-х девушек, если девушки могут сидеть друг с другом, а юноши нет?
5. Доказать, что, если число $2^n + 1$ - простое, то найдется такое целое, положительное m , для которого $n = 2^m$.

6. Тренер Хитромудров попарно взвесил своих спортсменов во всех возможных сочетаниях и обнаружил удивительный факт: полученные числа образуют арифметическую прогрессию: 130; 130,4; 130,8; ... ; 144. Чему равен общий вес этих спортсменов?

7. Из одинаковых кубиков составлен параллелепипед. Три грани этого параллелепипеда, имеющие общую вершину, покрасили. Оказалось, что у половины всех кубиков окрашена хотя бы одна грань. Сколько таких окрашенных кубиков?

Задачи 8-10 решаются при следующих предположениях. Предположим, что вы находитесь в Лесу Забывчивости. В этом особом месте постоянно забываются самые простые вещи, вроде дня недели. Кроме того, обитатели Леса тоже очень своеобразные создания. Например, здесь можно встретить Льва и Единорога. Лев лжет по понедельникам, вторникам и средам, а в остальные дни недели говорит правду. Единорог лжет по четвергам, пятницам и субботам и говорит правду во все остальные дни. Есть здесь и два брата-близнеца, Труляля и Траляля, неотличимые друг от друга. Один из них ведет себя точно также как Лев (то есть лжет по понедельникам, вторникам и средам и говорит правду в остальные дни), а другой как Единорог (то есть лжет по четвергам, пятницам и субботам и говорит правду в остальные дни).

Во втором туре Вы должны не только отметить правильный ответ, но и объяснить логику решения.

8. Вы встречаете братьев вместе и они заявляют следующее:
Первый:

1. Я лгу по субботам
2. Я лгу по воскресеньям

Второй:

1. Я буду лгать завтра

Отметьте крестиком, в какой день недели это было.

Пн	Вт	Ср	Чт	Пт	Сб	Вс

9. Вы снова встречаете братьев вместе и они высказывают следующие утверждения:

Первый: Если я Траляля, то он Труляля.

Второй: Если он Труляля, то я Траляля.

Отметьте крестиком, в какой день недели это было.

Пн	Вт	Ср	Чт	Пт	Сб	Вс

10. Вы опять встречаете братьев вместе. В этот раз они особенно разговорчивы и делают следующие высказывания:

Первый: Сегодня не воскресенье

Второй: Сегодня понедельник

Первый: Завтра - один из дней, когда Труляля лжет

Второй: Лев лгал вчера.

Из этих высказываний можно получить сразу несколько вопросов.

А. Какой день недели?

Пн	Вт	Ср	Чт	Пт	Сб	Вс

В. Кто из двух братьев кто?

	Траляля	Труляля
Первый		
Второй		

С. Как ведет себя Траляля, как Лев или как Единорог?

Как Лев	Как Единорог



МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА 2018

ПЕРВЫЙ ТУР

[Пройти тест онлайн](#)

[Решение](#)

1. В семье 4 человека. Если Оле удвоят стипендию, то общий доход семьи возрастет на 7%, если вместо этого маме удвоят зарплату – то на 24%, если же зарплату удвоят папе – то на 40%. На сколько процентов возрастет доход всей семьи, если бабушке удвоят пенсию?

Варианты ответов (%):

(a) 16; (b) 18; (c) 21; (d) 25; (e) 29; (f) 34; (g) 39.

2. На острове $\frac{4}{5}$ всех женщин замужем и $\frac{12}{17}$ всех мужчин женаты. Какой процент взрослого населения острова состоит в браке?

Варианты ответов (%):

(a) 60; (b) 65; (c) 70; (d) 75; (e) 80; (f) 85; (g) 90.

3. Султан и Манучер, посорившись, разбежались в противоположные стороны с одинаковой и постоянной скоростью. После 5 минут бега Манучер решил помириться с Султаном и, повернувшись назад, бросился его догонять увеличив скорость. Во сколько раз Манучер увеличил скорость бега, если он догнал Султана через 4 минуты?

Варианты ответов:

(a) 1,5; (b) 2; (c) 2,5; (d) 3; (e) 3,5; (f) 4; (g) 4,5

4. Автомобиль из А в В ехал со средней скоростью 50 км/ч, а обратно возвращался со скоростью 30 км/ч. Какова его средняя скорость?

Варианты ответов (км/ч):

(a) 36; (b) 37,5; (c) 40; (d) 40,5; (e) 42,5; (f) 43,5; (g) 45.

5. Сколькими способами множество, состоящее из 9 различных предметов, можно разделить на два непересекающихся непустых подмножества?

Варианты ответов:

(a) 127; (b) 189; (c) 255; (d) 510; (e) 512; (f) 1023; (g) 2046.

6. Сколькими способами можно рассадить в один ряд 3-х юношей и 3-х девушек, если девушки могут сидеть друг с другом, а юноши нет?

Варианты ответов:

(a) 36; (b) 64; (c) 72; (d) 128; (e) 144; (f) 256; (g) 288.

7. Вычислить следующую сумму при $n=12$:

$$\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}.$$

Варианты ответов:

(a) 0,495; (b) 0,49; (c) 0,485; (d) 0,48; (e) 0,475 (f) 0,47; (g) 0,465.

8. Для математической олимпиады 30 школьников из 5 различных классов предложили 40 задач. Любые два одноклассника придумали одинаковое число задач, а любые два школьника из разных классов придумали разное число задач. Сколько человек придумало одну задачу?

Варианты ответов:

(a) 2; (b) 6; (c) 10; (d) 14; (e) 18; (f) 22; (g) 26

9. Все положительные целые числа, начиная с единицы, выписаны подряд в порядке возрастания. Какая цифра стоит на 2018 месте?

Варианты ответов: (a) 0; (b) 1; (c) 2; (d) 3; (e) 5; (f) 6; (g) 9.

10. Из трех точек, которые находятся на расстояниях 1 км, 635 м и 270 м от основания телевизионной вышки, ее видно под углами, сумма которых равна 90° . Найдите высоту вышки.

Варианты ответов (м):

(a) 150; (b) 200; (c) 250; (d) 300; (e) 350; (f) 400; (g) 450.

11. На складе совершено крупное хищение. Похищенное было вывезено на автомобиле. Подозрение пало на трех рецидивистов – A , B и C . В ходе расследования было установлено следующее:

- 1) Никто, кроме A , B и C , не был замешан в хищении.
- 2) C никогда не ходит на дело без A (и, возможно, других соучастников).
- 3) B не умеет водить машину.

Что вы можете сказать о виновности A , B и C ?

Варианты ответов предложены в следующей таблице:

	Виновен	Не виновен	Нельзя определить
A			
B			
C			

12. В преступлении подозреваются A , B и C . Установлено следующее:

- 1) Никто, кроме A , B и C , не замешан в преступлении.
- 2) A никогда не идет на дело по крайней мере без одного соучастника.
- 3) C невиновен.

Что вы можете сказать о виновности A и B ?

Варианты ответов предложены в следующей таблице:

	Виновен	Не виновен	Нельзя определить
A			
B			

13. Совершено ограбление. Подозреваются три рецидивиста – A , B и C . A и C – близнецы и похожи друг на друга настолько, что мало кто умеет отличить одного от другого. Полиции известно, что A и C очень робкие и не ходят на дело без соучастника. B отличается большой дерзостью и терпеть не может ходить на дело с соучастниками. Кроме того, достоверно известно, что одного из близнецов видели в совершенно другом месте во время ограбления. Также точно известно, что никто, кроме A , B и C , не замешан в ограблении. Что вы можете сказать о виновности A , B и C ?

Варианты ответов предложены в следующей таблице:

	Виновен	Не виновен	Нельзя определить
A			
B			
C			

14. Какие выводы вы можете сделать из следующих фактов о другом преступлении:

- 1) Если A виновен и B не виновен, то C виновен.
- 2) C никогда не действует в одиночку.
- 3) A никогда не ходит на дело вместе с C .
- 4) Никто, кроме A , B и C , в преступлении не замешан, и, по крайней мере, один из этой тройки виновен.

Варианты ответов предложены в следующей таблице:

	Виновен	Не виновен	Нельзя определить
A			
B			
C			

15. В ограблении подозреваются 3 человека: A , B и C . Неопровержимыми уликами доказано, что по крайней мере один из них виновен и что никто, кроме A , B и C , в преступлении не участвовал. Кроме того, удалось установить следующее:

- 1) Если A виновен, то у него был ровно один соучастник.
- 2) Если B виновен, то у него было ровно два соучастника.

Что вы можете сказать о виновности A , B и C ?

Варианты ответов предложены в следующей таблице:

	Виновен	Не виновен	Нельзя определить
A			
B			
C			



**МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
ОЛИМПИАДА 2018**
ВТОРОЙ ТУР

[Пройти тест онлайн](#)

[Решение](#)

1. На плоскости отмечено 5 точек с целочисленными координатами. Докажите, что середина, по крайней мере одного из соединяющих эти точки отрезков, также имеет целочисленные координаты.
2. Зарина и Полина живут в одном доме, на каждом этаже которого расположены 4 квартиры. Зарина живет на седьмом этаже в квартире 105, а Полина – на втором этаже в квартире номер 207. Сколько этажей в доме?
3. Найдите все целочисленные решения уравнения

$$2x^2 + 5y^2 - 4xy - 2y - 4x + 5 = 0.$$

4. В колонию, состоящую из ста бактерий, попадает один вирус. В течение минуты он уничтожает одну бактерию и делится на два новых вируса. В это же время каждая из оставшихся в живых бактерий делится на две новые. Далее, этот процесс повторяется с новыми бактериями и вирусами. Будет ли эта колония жить бесконечно долго, или, если она в конце концов погибнет, то через какое время это произойдет?

5. Эльмира не смогла принять участия в математической олимпиаде, но сказала, что может вычислить, сколько участников заняли первое, второе и третье места, соответственно, так как ей известно, что занявшие первое место набрали по 19 баллов, второе — по 18; третье — по 17, а все призеры, суммарно, набрали 89 баллов. Сможете ли Вы повторить вычисления Эльмиры?

6. В шахматном турнире каждый шахматист половину своих очков набрал в играх с участниками, занявшими три последних места. Сколько человек приняло участие в турнире?

7. Найдите сумму всех чисел, которые являются членами двух арифметических прогрессий 5, 9, 13, . . . и 3, 9, 15, . . . , одновременно. При этом известно, что каждая из этих прогрессий содержит по 200 членов.

8. Браун, Джонс и Смит работают в банке. Один из них кассир, другой менеджер, а третий клерк. Известно, что

- 1) Клерк единственный ребенок в семье и он зарабатывает меньше всех из трех.
- 2) Смит женат на сестре Брауна и зарабатывает больше менеджера.

Определите должность каждого из этих людей в банке. Ответ запишите в следующую таблицу:

	Браун	Джонс	Смит
Должность			

9. Воронов, Павлов, Ревецкий и Сухарев – четыре очень талантливых человека. Один из них танцор, другой художник,

третий певец и четвертый писатель (не обязательно в соответствующем порядке). Известно, что

- 1) Воронов и Ревецкий аплодировали первому выступлению певца.
- 2) И Павлов, и писатель позировали для художника.
- 3) Биография Сухарева, написанная писателем, была бестселлером и сейчас он планирует написать биографию Воронова.
- 4) Воронов никогда не слышал о Ревецком.

Определите профессию каждого из этих людей. Ответ запишите в следующую таблицу:

	Воронов	Павлов	Ревецкий	Сухарев
Профессия				

10. Фамилии архитектора, банкира, аптекаря и продавца в небольшом городе – Картер, Флинн, Милн и Смит (не обязательно в соответствующем порядке). Известно, что

- 1) Зарплата каждого из них – целое число долларов.
- 2) Аптекарь зарабатывает в два раза больше чем продавец; архитектор зарабатывает в два раза больше чем аптекарь; банкир зарабатывает в два раза больше чем архитектор.
- 3) Флинн зарабатывает больше чем Картер, но не в два раза больше.
- 4) Смит зарабатывает на 3776 долларов больше чем Милн.

Определите профессию каждого из этих людей. Ответ запишите в следующую таблицу:

	Картер	Флинн	Милн	Смит
Профессия				



**МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
ОЛИМПИАДА 2019**

ПЕРВЫЙ ТУР

[Пройти тест онлайн](#)

[Решение](#)

1. На семинаре по курсу «Линейная алгебра» число отсутствующих в группе студентов составило $\frac{1}{6}$ часть от числа присутствовавших. После того как пришел еще один опоздавший студент, число отсутствующих стало равно 12% от числа присутствующих. Сколько студентов в этой группе?

Варианты ответов:

(a) 19; (b) 25; (c) 28; (d) 8; (e) 31; (f) 35; (g) 41.

2. Найти сумму всех положительных двузначных четных чисел, делящихся на 3 нацело.

Варианты ответов:

(a) 750; (b) 762; (c) 774; (d) 786; (e) 798; (f) 810; (g) 822.

3. К 6 литрам морской воды добавили 9 литров пресной, в итоге получили 7-процентный солевой раствор. Каков был процент содержания соли в морской воде?

Варианты ответов (%):

(a) 15,5; (b) 16; (c) 16,5; (d) 17; (e) 17,5; (f) 18; (g) 18,5.

4. Малыш и Карлсон, поедая одновременно варенье из банки, могут опустошить ее за 2 минуты. Известно, что Карлсон ест варенье в два раза быстрее, чем Малыш. За какое время они съедят все варенье из банки, если сначала Малыш съест третью его часть, а потом передаст банку Карлсону?

Варианты ответов (мин):

(a) 4; (b) 4,5; (c) 5; (d) 5,5; (e) 6; (f) 6,5; (g) 7.

5. Найти сумму всех целых положительных корней уравнения

$$13x + 14y + 15z = 121$$

Варианты ответов: (a) 5; (b) 6; (c) 7; (d) 8; (e) 9; (f) 10; (g) 11.

6. Площадь прямоугольного треугольника равна 30 см^2 . Определите периметр этого треугольника, зная, что длины его сторон являются целыми числами.

Варианты ответов (см):

(a) 12; (b) 16; (c) 20; (d) 24; (e) 28; (f) 30; (g) 32.

7. Из A в B в первой половине дня выехал велосипедист, в это же время, из B в A вышел пешеход. Они встретились в полдень, но не остановились, а продолжили свой путь, не меняя скорости. Велосипедист приехал в B в час дня, а пешеход пришел в A в 9 часов вечера. В котором часу из A выехал велосипедист?

Варианты ответов (час):

(a) 4; (b) 5; (c) 6; (d) 7; (e) 8; (f) 9; (g) 10.

8. Функция $f(x)$ удовлетворяет соотношению

$$2f(x) + f(x^2 - 2) = 2019 \text{ при всех действительных значениях } x.$$

Найти величину $f(\sqrt{3})$

Варианты ответов:

(a) 668; (b) 673; (c) 678; (d) 683; (e) 688; (f) 693; (g) 698.

9. Сколькими способами можно рассадить в один ряд 4-х юношей и 4-х девушек, если девушки могут сидеть друг с другом, а юноши нет?

Варианты ответов:

(a) 24; (b) 120; (c) 240; (d) 360; (e) 720; (f) 1440; (g) 2880.

10. Сколько решений имеет уравнение

$$150 \cdot \sin x = x ?$$

Варианты ответов:

(a) 46; (b) 48; (c) 53; (d) 91; (e) 95; (f) 96; (g) 101.

В некотором государстве король подвергает своих узников следующему изощренному испытанию: узник должен выбрать одну из двух комнат, в каждой из которых находится либо принцесса, либо тигр. Если узник выбрал комнату с принцессой, то он свободен и может покинуть тюрьму с прекрасной невестой, если в выбранной комнате был тигр, то узник погибает. У короля очень переменчивое настроение, поэтому возможно, что в обеих комнатах будут принцессы, или в обеих комнатах будут тигры. На дверях комнат написаны важные для правильного выбора сообщения, кроме того, узнику может быть сообщена дополнительная достоверная информация. Помогите узникам освободиться от сумасбродного тирана!

11.

Сообщение на двери первой комнаты	Сообщение на двери второй комнаты
В этой комнате находится принцесса, а в другой комнате сидит тигр.	В одной из этих комнат находится принцесса; кроме того, в одной из этих комнат сидит тигр.

Кроме того, узнику известно, что одно из сообщений на дверях – правда, а другое сообщение – ложь.

С какой ситуацией имеет дело узник?

Варианты ответов:

- (a) 1 комната - тигр, 2 комната – тигр;
- (b) 1 комната - тигр, 2 комната - принцесса;
- (c) 1 комната – принцесса, 2 комната – тигр;
- (d) 1 комната – принцесса, 2 комната – принцесса.

12.

Сообщение на двери первой комнаты	Сообщение на двери второй комнаты
По крайней мере, в одной из этих комнат находится принцесса.	Тигр сидит в другой комнате.

Кроме того, узнику известно, что оба сообщения на дверях либо одновременно истинны, либо одновременно ложны. С какой ситуацией имеет дело узник?

Варианты ответов:

- (a) 1 комната - тигр, 2 комната – тигр;

- (b) 1 комната - тигр, 2 комната - принцесса;
 (c) 1 комната – принцесса, 2 комната – тигр;
 (d) 1 комната – принцесса, 2 комната – принцесса.

13.

Сообщение на двери первой комнаты	Сообщение на двери второй комнаты
Верно, по крайней мере, одно из высказываний: «в этой комнате сидит тигр», «принцесса находится в другой комнате».	Принцесса находится в другой комнате.

Кроме того, узнику известно, что оба сообщения на дверях либо одновременно истинны, либо одновременно ложны. С какой ситуацией имеет дело узник?

Варианты ответов:

- (a) 1 комната - тигр, 2 комната – тигр;
 (b) 1 комната - тигр, 2 комната - принцесса;
 (c) 1 комната – принцесса, 2 комната – тигр;
 (d) 1 комната – принцесса, 2 комната – принцесса.

После трех испытаний король решил усложнить задачу, стоящую перед узниками. В следующих задачах сообщение на первой двери истинно, если там находится принцесса и ложно, если там находится тигр, а сообщение на второй двери истинно, если там находится тигр и ложно, если там находится принцесса.

14.

Сообщение на двери первой комнаты	Сообщение на двери второй комнаты
В обеих комнатах находятся принцессы.	В обеих комнатах находятся принцессы.

С какой ситуацией имеет дело узник?

Варианты ответов:

- (a) 1 комната - тигр, 2 комната – тигр;
- (b) 1 комната - тигр, 2 комната - принцесса;
- (c) 1 комната – принцесса, 2 комната – тигр;
- (d) 1 комната – принцесса, 2 комната – принцесса.

15.

Сообщение на двери первой комнаты	Сообщение на двери второй комнаты
По крайней мере, в одной из комнат находится принцесса.	Принцесса - в другой комнате.

С какой ситуацией имеет дело узник?

Варианты ответов:

- (a) 1 комната - тигр, 2 комната – тигр;
- (b) 1 комната - тигр, 2 комната - принцесса;
- (c) 1 комната – принцесса, 2 комната – тигр;
- (d) 1 комната – принцесса, 2 комната – принцесса.



МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
ОЛИМПИАДА 2019
ВТОРОЙ ТУР

[Пройти тест онлайн](#)

[Решение](#)

1. Три угла четырехугольника тупые. Докажите, что диагональ, проведенная из вершины острого угла, больше другой диагонали.

2. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} 2 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 1 \cdot x_3 + 9 \cdot x_4 = 2, \\ 2 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 1 \cdot x_4 + 9 \cdot x_1 = 0, \\ 2 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 + 1 \cdot x_1 + 9 \cdot x_2 = 1, \\ 2 \cdot x_4 + 0 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + 9 \cdot x_3 = 9. \end{cases}$$

3. Доказать, что для любого целого и положительного n , число, состоящее из 3^n единиц делится на 3^n нацело.

4. Все положительные целые числа, начиная с единицы, выписаны подряд в порядке возрастания. Какая цифра стоит на 2019 месте?

5. Известно, что сумма n первых членов арифметической прогрессии равна сумме m первых членов этой же прогрессии ($m > n$). Сколько первых членов этой прогрессии нужно взять, чтобы их сумма оказалась равной нулю?

6. Доказать, что для любого целого положительного n справедливо утверждение: если действительные числа a_1, a_2, \dots, a_n положительны и $a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n = 1$, то выполнено неравенство:

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n \geq n.$$

7. Некоторая фирма состоит из 2-х подразделений. Руководство этой фирмы решило поднять среднюю заработную плату каждого из этих подразделений, не вкладывая дополнительных средств. С этой целью, некоторого работника из 1-го подразделения перевели во 2-е подразделение, не меняя при этом его заработную плату. После этого средняя заработная плата на каждом подразделении увеличилась на \$100. Для дальнейшего улучшения показателей, руководство фирмы еще одного работника из 1-го подразделения перевело во 2-е, не меняя при этом его заработную плату. После этого средняя заработная плата на каждом подразделении увеличилась еще на 4%. Определите среднюю заработную плату работников этой фирмы.

В государстве (из 1 тура) продолжают жесткие логические испытания. Напоминаем, что узники должны выбирать одну из двух комнат. В каждой комнате находится либо принцесса, либо тигр.

Сообщение на первой двери истинно, если там находится принцесса, и ложно, если там находится тигр.

Сообщение на второй двери истинно, если там находится тигр, и ложно, если там находится принцесса.

8.

Сообщение на двери первой комнаты	Сообщение на двери второй комнаты
Что ни выберешь – все едино.	Принцесса - в другой комнате.

С какой ситуацией имеет дело узник?

Варианты ответов:

- (a) 1 комната - тигр, 2 комната – тигр;
- (b) 1 комната - тигр, 2 комната - принцесса;
- (c) 1 комната – принцесса, 2 комната – тигр;
- (d) 1 комната – принцесса, 2 комната-принцесса

9.

Сообщение на двери первой комнаты	Сообщение на двери второй комнаты
Что выбрать – большая разница.	Лучше выбрать другую комнату.

С какой ситуацией имеет дело узник?

Варианты ответов:

- (a) 1 комната - тигр, 2 комната – тигр;
- (b) 1 комната - тигр, 2 комната - принцесса;
- (c) 1 комната – принцесса, 2 комната – тигр;
- (d) 1 комната – принцесса, 2 комната - принцесса

10. Это испытание оказалось более сложным, потому что слуги короли не успели повесить вот эти сообщения на двери комнат:

В этой комнате сидит тигр.

В обеих комнатах сидят тигры.

Узник не знает, для какой комнаты каждое из этих сообщений.
Помогите ему решить эту трудную задачу.

Варианты ответов:

- (a) 1 комната - тигр, 2 комната – тигр;
- (b) 1 комната - тигр, 2 комната - принцесса
- (c) 1 комната – принцесса, 2 комната – тигр;
- (d) 1 комната – принцесса, 2 комната - принцесса

ОТВЕТЫ ПЕРВОГО ТУРА

2012 год

- | | |
|------|-------|
| 1. a | 9. a |
| 2. b | 10. d |
| 3. d | 11. c |
| 4. c | 12. e |
| 5. c | 13. i |
| 6. b | 14. i |
| 7. e | 15. g |
| 8. c | |

2013 год

- | | |
|------|-------|
| 1. e | 6. c |
| 2. d | 7. b |
| 3. b | 8. d |
| 4. b | 9. e |
| 5. d | 10. d |
| 11. | |

Имя	Профессия	Город, в котором проживает человек
Азамат	агроном	Андижан
Борис	аптекарь	Бишкек
Болот	бухгалтер	Баткен

12.

Имя	1 число (меньшее)	2 число (большее)
Эмиль	4	7
Федор	1	3
Хасан	2	5
Медер	6	10
Владимир	8	9

13.

Развлечение	Парень	Девушка
Театр	Даниил	Рахат
Концерт	Андрей	Шербет
Выставка	Борис	Ольга
Кино	Чингиз	Перизат

14. Профессия соучастника: страховой агент15. Разбил окно: Леонид.**2014 год**

1. с
2. е
3. с
4. с
5. d
6. с
7. d
8. b

9. a
10. b
11. с
12. b
13. b
14. f
15. d

2015 год

- | | |
|------|-------|
| 1. c | 8. e |
| 2. b | 9. d |
| 3. b | 10. c |
| 4. c | 11. c |
| 5. d | 12. c |
| 6. a | 13. d |
| 7. d | 15. a |

14.

	Тип А	Тип В	Невозможно определить тип
Мистер Гордон			X
Миссис Гордон		X	

2016 год

- | | |
|------|-------|
| 1. a | 8. d |
| 2. a | 9. b |
| 3. b | 10. d |
| 4. d | 11. a |
| 5. c | 13. c |
| 6. d | 14. a |
| 7. e | 15. a |

12.

	Рыцарь	Лжец	Оборотень
<i>A</i>		X	
<i>B</i>		X	
<i>C</i>	X		X

2017 год

1. e
2. d
3. c
4. b
5. c
6. e

7. f
8. d
9. f
10. g
15. a

11.

Пн	Вт	Ср	Чт	Пт	Сб	Вс
			X			

12.

Пн	Вт	Ср	Чт	Пт	Сб	Вс
X						

13.

Пн	Вт	Ср	Чт	Пт	Сб	Вс

14.

Пн	Вт	Ср	Чт	Пт	Сб	Вс
X		X				

2018 год

1. e
2. d
3. e
4. b
5. c

6. e
7. d
8. g
9. b
10. d

11.

	Виновен	Не виновен	Нельзя определить
<i>A</i>	X		
<i>B</i>			X
<i>C</i>			X

12.

	Виновен	Не виновен	Нельзя определить
<i>A</i>			X
<i>B</i>	X		

13.

	Виновен	Не виновен	Нельзя определить
<i>A</i>		X	
<i>B</i>	X		
<i>C</i>		X	

14.

	Виновен	Не виновен	Нельзя определить
<i>A</i>			X
<i>B</i>	X		
<i>C</i>			X

15.

	Виновен	Не виновен	Нельзя определить
<i>A</i>			X
<i>B</i>		X	
<i>C</i>	X		

2019 год

1. с
2. f
3. е
4. а
5. е
6. f
7. f
8. b

9. g
10. е
11. b
12. b
13. d
14. b
15. с

ОТВЕТЫ ВТОРОГО ТУРА

2012 год

1. в 6 часов утра
2. вес будет одинаков.
3. на 40 минут раньше установленного срока.
6. 9 способов.
7. а) 722,(2) км; б) 833,(3) км.
8. а) оборотень - лжец (а именно C); б) следует остановить свой выбор на A .
9. C - рыцарь и оборотень, A и B - лжецы, и ни один из них не оборотень.
10. C - оборотень.

2013 год

1. ананас.
2. 12 абитуриентов.
3. через 16 минут расстояние будет минимальным и равным 12 км.
5. через 360 суток.
6. Последовательность сходится при любом положительном числе q . Последовательность сходится к целому числу, если q является произведением любых двух последовательных натуральных чисел.
7. 1.

9.

Номер супружеской пары	Имя мужа	Имя жены	Возраст мужа	Возраст жены
1	Андрей	Бермет	27	22
2	Тимур	Марина	26	21
3	Ильяс	Ева	30	25

10.

Имя офицера	Звание	Род войск
Борис	подполковник	связист
Франц	майор	артиллерист
Ян	майор	летчик
Антон	майор	сапер
Улан	капитан	пехотинец

2014 год

1. ящики весят одинаково.

5. 8

7. 66

8. A - лжец, B - рыцарь, C - шпион9. A - шпион, B - рыцарь, C – лжец10. C – шпион11. шестой член= 132112132116, восьмой член=
311311222112311311222116.

2015 год

1. 4мм.

2. через середину противоположной стороны грани.

3. $\pm \frac{9}{7}$

6. такого треугольника не существует.

7. $\sin(\cos x) < \cos(\sin x)$

8. Это житель типа B

9.

	Тип A	Тип B	Невозможно определить тип
Мистер Смит	X		
Миссис Смит			X

10.

	Тип A	Тип B	Невозможно определить тип
Джон		X	
Бетти		X	

2016 год

1. нет

2. $(4,12), (12,4), (6,6), (2,-6), (-6,2)$.

3. 9 человек

4. 616,5

5. $5/24$.

6. $0, 1\frac{13}{61}, 2\frac{26}{61}, 3\frac{39}{61}, 4\frac{52}{61}$.

7. по A литров воды.

8.

	Виновен? (Да/Нет)
<i>A</i>	Нет
<i>B</i>	Нет
<i>C</i>	Нет

9. *B, C.*

10.

	Виновен	Не виновен	Невозможно определить
<i>A</i>			X
<i>B</i>			X
<i>C</i>			X
<i>D</i>	X		

2017 год

1. 8

3. сумма членов арифметической прогрессии больше, если первые члены положительны, и наоборот, если первые члены отрицательны; суммы равны, если разность арифметической прогрессии равна нулю (знаменатель геометрической прогрессии равен единице).

4. 1440

6. 616,5

7. таких кубиков может быть 60, 72, 84, 90 или 120.

8.

Пн	Вт	Ср	Чт	Пт	Сб	Вс
		X				

9.

Пн	Вт	Ср	Чт	Пт	Сб	Вс
						X

10.

А.

Пн	Вт	Ср	Чт	Пт	Сб	Вс
				X		

В.

	Траляля	Труляля
Первый	X	
Второй		X

С.

Как Лев	Как Единорог
	X

2018 год

2. 10

3. $x = 2, y = 1.$

4. колония погибнет через 100 минут.

5. одно первое место, два вторых и два третьих.

6. 9 человек

7. 27135.

8.

	Браун	Джонс	Смит
Должность	менеджер	клерк	кассир

9.

	Воронов	Павлов	Ревницкий	Сухарев
Профессия	танцор	певец	писатель	художник.

10.

	Картер	Флинн	Милн	Смит
Профессия	продавец	банкир	аптекарь	архитектор

2019 год

2. $x_1 = \frac{1}{82}$, $x_2 = -\frac{9}{82}$, $x_3 = \frac{81}{82}$, $x_4 = \frac{9}{82}$.

4. 0.

5. $n+m$.

7. \$ 2600.

8. 1 комната - тигр, 2 комната - принцесса.

9. 1 комната - принцесса, 2 комната - тигр.

10. 1 комната - тигр, 2 комната - принцесса.

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ПЕРВОГО ТУРА



1. (4 балла) У Маши и Мелиса были какие-то сбережения, но Маше не хватало для покупки мороженого шести центов, а Мелису двух центов. Они сложились, чтобы купить мороженое на двоих, но денег все равно не хватило. Сколько центов стоило этот мороженое?

Варианты ответов:

а) 7, б) 8, в) 9, д) 10, е) 11.

Решение

Обозначим количество центов (100 центов равны одному доллару) у Маши через a , у Мелиса — через e , цену мороженого — через p . Тогда, $a + b = p$; $e + 2 = p$;
 $a + e < p$.

В итоге, из первых двух уравнений: $a + e = 2p - 8$. Подставив это выражение для $a + e$ в третье соотношение, получим $2p - 8 < p$. Следовательно, $p < 8$.

Настало время обратить внимание на перечень возможных ответов, и выяснить, что неравенству удовлетворяет только одно значение $p = 7$.

Дополнительно, выяснилось, что у Маши был 1 цент, у Мелиса было 5 центов.

2. (4 балла) Первую половину пути велосипедист проехал со скоростью 20 км/час, но проколол шину и вторую половину пути прошел со скоростью 5 км/час. Какова была средняя скорость велосипедиста на всем пути?

Варианты ответов:

- а) 7, б) 8, в) 10,5, г) 12,5, е) 15.

Решение

Обозначим половину пути через s . Тогда, первую половину пути велосипедист проехал за время $s/20$, вторую — за время $s/5$. В итоге, путь длиной $2s$ велосипедист проехал за время $(s/20 + s/5)$. Таким образом, средняя скорость велосипедиста на всем пути:

$$\frac{2s}{s/20 + s/5} = \frac{2s}{s/20 + 4s/20} = \frac{2s}{5s/20} = \frac{2s}{s/4} = 8.$$

3. (7 баллов) Проехав за час половину пути, машинист увеличил скорость поезда на 15 км/ч и прошел вторую половину пути за 45 мин . С какой скоростью шел поезд первую половину пути?

Варианты ответов:

- а) 30, б) 35, в) 40, г) 45, е) 50.

Решение

Обозначим половину пути через s . Тогда, скорость поезда на первой половине пути равнялась $s/1$. Поэтому, если принять во внимание то, что 45 минут это: $45/60 = 0,75 \text{ часа}$,

имеет место уравнение: $\frac{s}{1} + 15 = \frac{s}{0,75}$. Отсюда, $s/1$, и

соответственно, искомая скорость $s/1$, равны 45 .

4. (7 баллов) Влажность фруктов перед сушкой была 23% , а после сушки стала 12% . На сколько процентов масса сухофруктов изменилась после сушки.

Варианты ответов:

а) 8,5, б) 11, с) 12,5, д) 15, е) 16,5.

Решение

Выражение «влажность фруктов перед сушкой была 23%» означает, что в каждых 100 граммах фруктов содержались 23 грамм воды. Соответственно, сухая субстанция весила 77 г. После сушки 77 г составляют 88%. Поэтому, исходные 100 г фруктов стали весить $77 \cdot 100 / 88 = 87,5$ г. Итак, масса сухофруктов после сушки уменьшилась на 12,5%.

5. (4 балла) Экзамен по математике сдавали 250 абитуриентов, оценку ниже пяти получили 180 человек, а выдержали этот экзамен (с оценкой >2) 210 абитуриентов. Сколько человек получили оценки 3 и 4?

Варианты ответов:

а) 40, б) 70, с) 140, д) 160, е) 180.

Решение

На первом шаге выясним, что оценку пять получили: $250 - 180 = 70$ абитуриентов, затем, вычтем это количество из числа выдержавших экзамен: $210 - 70 = 140$. Ответ: 140.

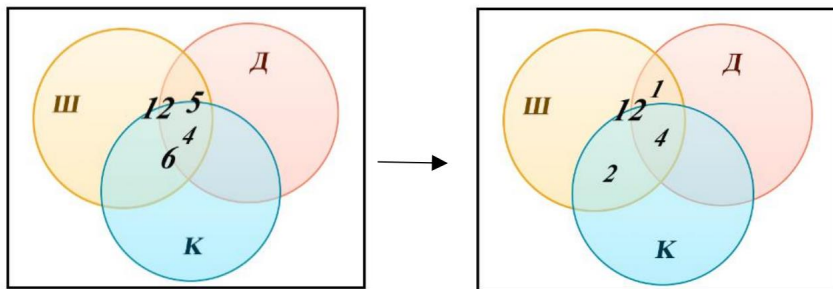
6. (7 баллов) В группе студентов каждый умеет играть хотя бы в одну игру: шахматы, домино или карты, а четверо умеют играть во все эти игры. В шахматы играют 12 человек; играть в домино и шахматы умеют 5 человек, а в карты и шахматы – шестеро студентов. Хотя бы в одну из двух игр: домино или карты играют 16 человек. Сколько студентов в этой группе?

Варианты ответов:

а) 17, б) 21, с) 25, д) 29, е) 31.

Решение

Воспользуемся диаграммой Венна. Из условий задачи



Поэтому, число студентов, которые играют только в шахматы:
 $12 - (1 + 4 + 2) = 5$.

Следовательно, в этой группе $5 + 16 = 21$ студент.

7. (7 баллов) Сколькими способами 3 мальчика и 4 девочки можно рассадить в одном ряду, если на противоположных концах этого ряда должны сидеть мальчик и девочка?

Варианты ответов:

а) 360, б) 720, в) 1440, д) 2100, е) 2880.

Решение

Первый вариант: слева сидит мальчик, справа девочка. Таких вариантов: $3 \cdot 4 = 12$. Тогда, на оставшиеся 5 мест оставшихся мальчиков и девочек можно рассадить: $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ способами. Всего, получается $12 \cdot 120 = 1440$ способов.

Столько же способов во втором варианте, когда слева сидит девочка, справа мальчик.

Таким образом, ответ: $2 \cdot 1440 = 2880$ способов.

8. (9 баллов) Все целые числа, начиная с единицы, выписаны подряд. Таким образом, получается следующий ряд цифр:

123456789101112131415... Определить, какая цифра стоит на 206788-м месте?

Варианты ответов:

а) 3, б) 5, в) 7, г) 9, е) 0.

Решение

Ответ - цифра 7. Однозначных чисел ровно 9, двузначных $99 - 9 = 90$,

трёхзначных $999 - 99 - 9 = 900$, четырёхзначных 9000 и т.д.

Однозначные числа займут в выписанном ряду первые 9 мест,

двузначные $90 \cdot 2 = 180$ мест, трёхзначные $900 \cdot 3 = 2700$ мест,

четырёхзначные $9000 \cdot 4 = 36\,000$ мест, пятизначные

$90000 \cdot 5 = 450\,000$ мест. Поэтому интересующая нас цифра

принадлежит пятизначному числу. Цифры, принадлежащие

не более чем четырёхзначным числам, имеют номера

от 1 до $9 + 180 + 2700 + 36\,000 = 38\,889$. Разность

$206788 - 38889 = 167899$ нужно разделить на 5 с остатком:

$167899 = 5 \cdot 33579 + 4$. Таким образом, были выписаны 33 579

пятизначных чисел. Вместе с ними были выписаны

$9 + 90 + 900 + 9000$ одно, двух, трех и четырехзначных чисел.

Всего: $9 + 90 + 900 + 9000 + 3579 = 43578$. То есть,

интересующая нас цифра стоит на 4-м месте следующего

числа — числа 43 579.

В некоторых логических задачах встречаются сложные утверждения с логическими связками «либо», «или», «и».

Напоминаем их смысл. Пусть P и Q какие-либо утверждения.

Тогда:

- утверждение «либо P , либо Q » истинно, когда только одно из утверждений P , Q истинно;
- утверждение «или P , или Q » истинно, когда хотя бы одно из утверждений P , Q истинно;
- утверждение « P и Q » истинно, когда оба утверждения P , Q истинны;

Действие задач 9-12 происходит на острове. Предполагается, что каждый обитатель острова либо рыцарь, либо лжец. Рыцари всегда говорят только правду. Лжецы всегда лгут.

9. (4 балла) В этой задаче два персонажа: A и B . Каждый из них либо рыцарь, либо лжец. A высказывает следующее утверждение: "По крайней мере, один из нас лжец". Кто из двух персонажей A и B рыцарь и кто лжец?

Варианты ответов:

- а) A -рыцарь, B -лжец; б) A -рыцарь, B -рыцарь;
 с) A -лжец, B -рыцарь; д) A -лжец, B -лжец.

Решение

Предположим, что A - лжец. Если бы это было так, то утверждение "По крайней мере один из нас лжец" было бы ложным (так как лжецы высказывают ложные утверждения). Следовательно, в этом случае A и B были бы рыцарями. Таким образом, если бы A был лжецом, то он не был бы лжецом, что невозможно. Отсюда мы заключаем, что A не лжец, он рыцарь. Но тогда высказанное A утверждение должно быть истинным. Поэтому по крайней мере один из двух персонажей A и B в действительности лжец. Так как A - рыцарь, то лжецом должен быть B . Итак, A - рыцарь, а B - лжец.

10. (4 балла) В этой задаче снова два островитянина: A и B . Предположим, что A высказывает утверждение: "Я лжец и B не лжец". Кто из них рыцарь и кто лжец?

Варианты ответов:

- а) A -рыцарь, B -лжец; б) A -рыцарь, B -рыцарь;
 с) A -лжец, B -рыцарь; д) A -лжец, B -лжец.

Решение

Прежде всего заметим, что A не может быть рыцарем. Действительно, если бы A был рыцарем, то его высказывание было бы истинным, а в нем утверждается, что A - лжец. Следовательно, A - лжец, и его высказывание ложно. Если бы B был рыцарем, то высказывание A было бы истинным. Следовательно, B также лжец. Итак, A и B - лжецы.

11. (7 баллов) В этой задаче три островитянина: A , B и C . Проходивший мимо незнакомец спросил у A : «Вы рыцарь или лжец?». На этот вопрос A ответил неразборчиво. Тогда незнакомец спросил у B : "Что сказал A ?"; B ответил: " A сказал, что он лжец". И тогда C закричал: "Не верьте B ! Он лжет!". Кто из двух персонажей B и C рыцарь и кто лжец?

Варианты ответов:

- а) B -рыцарь, C -лжец; б) B -рыцарь, C -рыцарь;
 в) B -лжец, C -рыцарь; д) B -лжец, C -лжец.

Решение

Ни рыцарь, ни лжец не могут сказать: "Я лжец" (высказав подобное утверждение, рыцарь солгал бы, а лжец изрек бы истину). Следовательно, A , кем бы он ни был, не мог сказать о себе, что он лжец. Поэтому B , утверждая, будто A назвал себя лжецом, заведомо лгал. Значит, B - лжец. А так как C сказал, что B лгал, когда тот действительно лгал, то C изрек истину. Следовательно, C - рыцарь. Таким образом, B - лжец, а C - рыцарь.

(Установить, кем был A , не представляется возможным.)

12. (9 баллов) Снова в задаче три островитянина: A , B и C . Персонаж A высказывает утверждение: «Мы все лжецы», а B говорит: «Один из нас рыцарь». Кто из трех островитян A , B и C рыцарь и кто лжец?

Варианты ответов:

- a) A -рыцарь, B -рыцарь; C -лжец;
- b) A -рыцарь, B -рыцарь; C -рыцарь;
- c) A -рыцарь, B -лжец; C -рыцарь;
- d) A -рыцарь, B -лжец; C -лжец;
- e) A -лжец, B -рыцарь; C -лжец;
- f) A -лжец, B -рыцарь; C -рыцарь;
- g) A -лжец, B -лжец; C -рыцарь;
- h) A -лжец, B -лжец; C -лжец; .

Решение

Прежде всего заметим, что A должен быть лжецом. Действительно, если бы A был рыцарем, то из его высказывания следовало бы, что все трое лжецы. Но тогда A (по предположению, рыцарь) оказался бы лжецом, что невозможно. Следовательно, A - лжец. Но тогда его высказывание ложно и по крайней мере один из трех островитян A , B и C рыцарь.

Предположим теперь, что B - лжец. Тогда A и B - оба лжецы, поэтому C должен быть рыцарем (так как по крайней мере один из трех островитян рыцарь). Это означает, что ровно один из трех островитян рыцарь, и, следовательно, высказывание B истинно, но это невозможно, так как любое высказывание лжеца не истинно. Отсюда мы заключаем, что B должен быть рыцарем.

Итак, мы установили, что A - лжец, а B - рыцарь. Так как B рыцарь, то его высказывание истинно, поэтому ровно один из трех островитян - рыцарь. Им должен быть B , следовательно, C должен быть лжецом. Итак, A - лжец, B - рыцарь и C - лжец.

В задачах 13-15 на острове живут как мужчины, так и женщины, причем, каждый житель может быть либо рыцарем, либо лжецом, либо нормальным человеком. Рыцари всегда говорят правду, лжецы всегда лгут, а нормальные люди иногда

говорят правду, а иногда и лгут. На этом острове рыцарю разрешается вступать в брак только с лжецом, а лжецу - только с рыцарем (следовательно, нормальный человек может вступать в брак только с нормальным человеком). Таким образом, в любой супружеской паре на острове либо оба супруга - нормальные люди, либо один из супругов - рыцарь, а другой - лжец.

13. (9 баллов) Рассмотрим супружескую пару с острова: мистер A и миссис AA . Мистер A высказывает утверждение: «Моя жена - не нормальный человек», в свою очередь, миссис AA говорит: «Мой муж - не нормальный человек». Кто такой мистер A и кто такая миссис AA - рыцарь, лжец или нормальный человек?

Варианты ответов:

- | | |
|--|-------------------------------|
| a) A - нормальный, AA -лжец; | b) A -рыцарь, AA -лжец; |
| c) A -рыцарь, AA -нормальный; | d) A -лжец, AA -рыцарь; |
| e) A -лжец, AA - нормальный; | f) A -лжец, AA -лжец; |
| g) A - нормальный, AA -рыцарь; | h) A -рыцарь, AA -рыцарь; |
| i) A -нормальный, AA - нормальный. | |

Решение

Мистер A не может быть лжецом, так как тогда его жена была бы рыцарем и, следовательно, не могла бы быть нормальным человеком, а это означало бы, что высказывание мистера A было бы истинно. По аналогичной причине миссис AA не может быть и лжецом. Следовательно, ни мистер A , ни миссис AA не могут быть и рыцарями (в противном случае второй супруг был бы лжецом). Значит, мистер A и миссис AA - нормальные люди (и оба лгут).

14. (9 баллов) Предположим, что мистер A и миссис AA высказали следующие утверждения: мистер A : «Моя жена -

нормальный человек», а миссис AA : «Мой муж - нормальный человек». Кто такой мистер A и кто такая миссис AA - рыцарь, лжец или нормальный человек?

Варианты ответов:

- a) A - нормальный, AA - лжец; b) A -рыцарь, AA -лжец;
 c) A -рыцарь, AA -нормальный; d) A -лжец, AA -рыцарь;
 e) A -лжец, AA - нормальный; f) A -лжец, AA -лжец;
 g) A - нормальный, AA -рыцарь; h) A -рыцарь, AA -рыцарь;
 i) A -нормальный, AA - нормальный.

Решение

Мистер A не может быть рыцарем, так как тогда его жена была бы лжецом и, следовательно, не могла бы быть нормальным человеком, а это означало бы, что высказывание мистера A было бы ложно. По аналогичной причине миссис AA не может быть и рыцарем. Следовательно, ни мистер A , ни миссис AA не могут быть и лжецами (в противном случае второй супруг был бы рыцарем). Значит, мистер A и миссис AA - нормальные люди (и оба говорят правду).

15. (9 баллов) В этой задаче речь пойдет о двух супружеских парах с острова: мистере A и миссис AA , мистере B и миссис BB . При опросе трое из них дали следующие показания. Мистер A : «Мистер B – рыцарь»; миссис AA : «Мой муж прав: мистер B – рыцарь»; миссис BB : «Что верно, то верно. Мой муж действительно рыцарь». Кто каждый из этих четырех людей - рыцарь, лжец или нормальный человек?

Варианты ответов:

- a) A - рыцарь, AA -лжец; B -рыцарь, BB -лжец;
 b) A -рыцарь, AA -лжец; B -лжец, BB -рыцарь;
 c) A -рыцарь, AA -лжец; B и BB - оба нормальные;
 d) A - лжец, AA - рыцарь; B -рыцарь, BB -лжец;

- е) A - лжец, AA - рыцарь; B -лжец, BB -рыцарь;
 ф) A - лжец, AA - рыцарь; B и BB - оба нормальные;
 г) A и AA - оба нормальные; B и BB - оба нормальные;
 h) A и AA - оба нормальные; B -рыцарь, BB -лжец;
 и) A и AA - оба нормальные; B -лжец, BB -рыцарь;

Решение

Оказывается, что все четверо - нормальные люди, а все три высказывания ложны. Прежде всего заметим, что миссис BB должна быть нормальным человеком, так как если бы она была рыцарем, то ее муж был бы лжецом и, назвав его рыцарем, она солгала бы. Если бы миссис BB была лжецом, то ее муж был бы рыцарем, но Тогда ее высказывание о своем муже было бы истинным. Следовательно, миссис BB - нормальный человек, тогда мистер B также нормальный человек. Это означает, что мистер A и миссис AA оба лгали. Отсюда мы заключаем, что ни один из супругов A и AA не рыцарь и что они не могут быть и лжецами. Следовательно, супруги A и AA - нормальные люди.



МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА 2013

ПЕРВЫЙ ТУР

1.(4 балла) Вниз по течению из пункта А в пункт В теплоход плывет 5 дней, а обратно 7 дней. Сколько дней нужно плоту, чтобы проплыть из А в В?

Варианты ответов: (А) 6; (В) 10; (С) 12; (D) 24; (Е) 35.

Решение

Обозначим через u собственную скорость теплохода, через v — скорость течения реки, которая совпадает со скоростью плота, через s — расстояние от А до В.

Тогда, $(u + v)5 = s$; $(u - v)7 = s$. Поэтому, $2u = 12v \Leftrightarrow u = 6v$. Следовательно, $s = (u + v)5 = (6v + v)5 = 35v$. Таким образом, ответ 35 дней.

2.(4 балла) Буквы азбуки Морзе состоят из символов (точек и тире). Сколько различных букв можно изобразить, если потребовать, чтобы каждая буква содержала не более пяти символов?

Варианты ответов: (А)30; (В) 32; (С) 48; (D) 62; (Е) 126.

Решение

«Букв», состоящих из одного символа 2; из двух: $2 \cdot 2$; из трех: $2 \cdot 2 \cdot 2$; из четырех: $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$; из пяти: $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$. Итого: $2 + 4 + 8 + 16 + 32 = 62$.

3.(4 балла) В группе из 20 студентов каждый умеет играть хотя бы в одну игру: шахматы, домино или карты, а четверо умеют играть во все эти игры. Играть в домино и шахматы умеют 5 человек, а в карты и шахматы – шестеро студентов. Хотя бы в

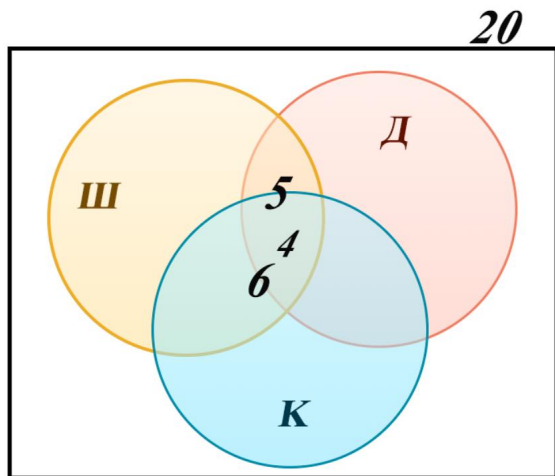
одну из двух игр: домино или карты играют 16 человек. Сколько студентов из этой группы умеют играть в шахматы?

Варианты ответов: (A) 10; (B) 11; (C) 12; (D) 13; (E) 14.

Решение

Воспользуемся диаграммой Венна.

Так как хотя бы в одну из двух игр: домино или карты играют 16 человек, только в шахматы играют: $20 - 16 = 4$ студента. Также, из диаграммы видно, что в шахматы и хотя бы в одну из других игр играют 7 студентов. Следовательно, в шахматы играют: $4 + 7 = 11$ студентов.



4.(4 балла) Каждый из двух братьев собирал грибы в свою корзину. Младший собрал 80 грибов (белых и груздей). Из них процент белых был в два раза меньше, а процент груздей в три

раза больше, чем у старшего брата. Сколько грибов собрали братья, если белых у них 92?

Варианты ответов: (A) 142; (B) 155; (C) 160; (D) 172; (E) 184.

Решение

Обозначим количество белых грибов, которые собрал младший через b , старший — через B ; количество груздей, которые собрал младший через g , старший — через G .

Тогда имеет место система из четырех уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} b + g = 80; \\ b + B = 92; \\ 2 \cdot \frac{b}{80} = \frac{B}{B + G}; \\ \frac{g}{80} = 3 \cdot \frac{G}{B + G}; \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} b + g = 80; \\ b + B = 92; \\ \frac{b}{40} = \frac{B}{B + G}; \\ \frac{g}{240} = \frac{G}{B + G}; \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} b + g = 80; \\ b + B = 92; \\ \frac{b}{40} = \frac{B}{B + G}; \\ \frac{b}{40} + \frac{g}{240} = 1. \end{array} \right.$$

Из первого и последнего уравнения полученной системы получим: $b = 32$; $g = 48$. Далее, $B = 60$ и, наконец, $G = 15$. Выяснилось, что братья собрали: $32 + 48 + 60 + 15 = 155$ грибов.

5* . (7 баллов) Ten tennis balls have numbers written on them so that one ball is numbered “1”, two balls are numbered “2”, three balls are numbered “3”, and four balls are numbered “4”. The balls are placed in a bag and three balls are drawn at random and without replacement. What is the probability that the sum of the numbers on the balls drawn is divisible by 5?

На десяти теннисных мячах написаны номера, так что один мяч имеет номер «1», два мяча - номер «2», три мяча

* Задача предложена преподавателями департамента математики Бард-колледжа (Нью-Йорк, США)

- номер «3», а четыре мяча - номер «4». Шары помещаются в сумку, и три шара выбираются случайным образом без замены. Какова вероятность того, что сумма чисел на этих шарах делится на 5?

Варианты ответов: (A) $\frac{1}{16}$; (B) $\frac{3}{40}$; (C) $\frac{1}{6}$; (D) $\frac{5}{24}$; (E) $\frac{1}{4}$.

Решение

Из условий задачи следует, что нужно вычислить вероятность того, что на трех вынутых шарах сумма чисел будет равна 5 или 10.

Сумма 5 получится в случае, когда на одном шаре будет число 1, на двух — число 2. Таких случаев:

$$C(1; 1)C(2; 2)C(3; 0)C(4; 0) = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1.$$

Сумма 10 получится в случае, когда на одном шаре будет число 2 и на двух шарах по 4 или на двух шарах по 3 и на одном шаре 4. Таких случаев:

$$C(1; 0)C(2; 1)C(3; 0)C(4; 2) + C(1; 0)C(2; 0)C(3; 2)C(4; 1) = 1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 6 + 1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 4 = 12 + 12 = 24.$$

Итак, количество благоприятных случаев: $1 + 24 = 25$, количество всех возможных случаев: $C(10; 3) = 120$. Следовательно, ответ: $25/120 = 5/24$.

6. (7 баллов) Сколькими способами можно разложить 8 одинаковых мячей по четырем различным ящикам, чтобы в четвертом ящике всегда оказывалось нечетное число мячей?

Варианты ответов: (A) 12; (B) 35; (C) 70; (D) 140; (E) 280.

Решение

В четвертом ящике может быть или 1, или 3, или 5, или 7 мячей. Соответственно, в три ящика нужно разложить или 7, или 5, или 3, или 1 мяч.

Рассмотрим вариант, когда нужно разложить 7 мячей.

Выложим шары в ряд. Для определения расклада 7 мячей по трем ящикам разделим ряд двумя перегородками на три группы: первая группа для первого ящика, вторая – для второго, третья — для третьего. Для этого нужно мысленно представить 9 коробок (7 мячей плюс 2 перегородки) и в каждую коробку положить мяч или перегородку. Таким образом, число вариантов раскладки мячей по ящикам равно числу способов расположения двух перегородок. Перегородки могут стоять на любом из 9 мест. Поэтому число их возможных расположений равно: $C(9; 2) = 36$.

Рассуждая подобным образом, получим, что:

5 мячей можно разложить: $C(7; 2) = 21$ способом;

3 мяча можно разложить: $C(5; 2) = 10$ способами;

1 мячей можно разложить: $C(3; 2) = 3$ способами

Таким образом, ответ: $36 + 21 + 10 + 3 = 70$.

7. (7 баллов) По двум прямолинейным шоссе к точке их пересечения начинают двигаться две машины. Известно, что угол между направлениями движения этих машин равен 60° . Первая машина находится от места пересечения на расстоянии 60 км и движется с постоянной скоростью, равной 40 км/ч. Вторая машина находится от места пересечения на расстоянии 32 км и движется с постоянной скоростью 30 км/ч. Через какое время расстояние между машинами станет минимальным?

(Проехав место пересечения шоссе, каждая машина движется дальше.)

Варианты ответов:

(А) 1ч.20мин.; (В) 1ч.24мин.;

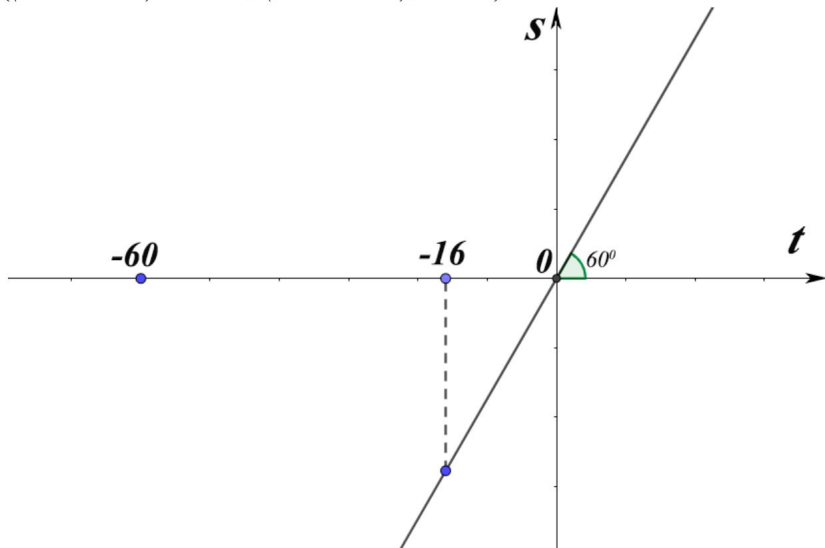
(С) 1ч.28мин.; (D) 1ч.32мин.;(E) 1ч.42 мин.

Решение

Воспользуемся прямоугольной системой координат с началом в точке пересечения шоссе. Будем считать, что первая машина движется по оси Ot слева направо, а вторая машина — по прямой образующей угол 60° с осью Ot .

Тогда, в момент времени t первая машина будет находится в точке с координатами

$(-60 + 40t; 0)$, а вторая — в точке с координатами $((-32 + 30t)\cos 60^\circ; (-32 + 30t)\sin 60^\circ)$.



Так как расстояние между двумя точками $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ определяется формулой $\sqrt{[x_2 - x_1]^2 + [y_2 - y_1]^2}$, косинус 60° равен $\frac{1}{2}$, синус 60° равен $\frac{\sqrt{3}}{2}$, расстояние между машинами будет минимальным в точке минимума функции $\left[(-60 + 40t) - (-16 + 15t)\right]^2 + \left[0 - (-32 + 30t) \frac{\sqrt{3}}{2}\right]^2$.

Для нахождения этой точки поступим стандартным образом: 1) возьмем производную; 2) приравняем ее к нулю; 3) решим полученное уравнение.

$$1) \left([-44 + 25t]^2 + \frac{3}{4} [-32 + 30t]^2 \right)' =$$

$$= 2(-44 + 25t)25 + \frac{3}{4} \cdot 2(-32 + 30t)30 = 2600t - 3640;$$

$$2) 2600t - 3640 = 0; \quad 3) t = 1,4.$$

Итак, ответ: машины будут на минимальном расстоянии друг от друга через 1,4 часа или, что то же самое, 1 час 24 минуты.

8. (7 баллов) Сколько различных целочисленных решений имеет неравенство

$$|x| + |y| < 100?$$

Варианты ответов:

(A) 18801; (B) 19404; (C) 1980; (D) 19801; (E) 20801.

Решение

Воспользуемся прямоугольной системой координат на плоскости. Тогда множество точек, координаты которых удовлетворяют неравенству, образует ромб, в первой строке

которого стоит точка с координатами $(0; 99)$; во второй — три точки: $(-1; 98)$, $(0; 98)$, $(1; 98)$; в третьей — пять точек: $(-2; 97)$, $(-1; 97)$, $(0; 97)$, $(1; 97)$; $(2; 97)$; ... ; в сотой — 199 точек: $(-99; 0)$, ... , $(-1; 0)$, $(0; 0)$, ..., $(1; 0)$; $(99; 0)$. Далее, пойдет по убыванию. В сто первой строке будет 197 точек: $(-98; -1)$, ... , $(-1; -1)$, $(0; -1)$, ..., $(1; -1)$; $(98; -1)$, и так далее. В сто девяносто восьмой строке будет три точки: $(-1; -98)$, $(0; -98)$, $(1; -98)$; в последней, сто девяносто девятой строке будет одна точка: $(0; -99)$.

То есть, количество целочисленных решений неравенства — число точек с целочисленными координатами есть сумма $1 + 3 + 5 + \dots + 197 + 199 + 197 + \dots + 3 + 1$. Для суммирования можно использовать формулу для членов арифметической прогрессии.

Ответ: 19801.

9. (9 баллов) Все натуральные числа, начиная с единицы, выписаны подряд. Какая цифра стоит на 1990-м месте?

Варианты ответов: (A) 3; (B) 4; (C) 5; (D) 6; (E) 7.

Однозначных чисел ровно 9, двузначных $99 - 9 = 90$, трёхзначных $999 - 99 - 9 = 900$, четырёхзначных 9000 и т.д. Однозначные числа займут в выписанном ряду первые 9 мест, двузначные $90 \cdot 2 = 180$ мест, трёхзначные $900 \cdot 3 = 2700$ мест. Поэтому интересующая нас цифра принадлежит трехзначному числу. Цифры, принадлежащие не более чем двухзначным числам, имеют номера от 1 до $9 + 180 = 189$. Разность $1990 - 189 = 1801$ нужно разделить на 3 с остатком: $1801 = 3 \cdot 600 + 1$.

Итак, выписаны 600 трехзначных чисел. Кроме них имеются 99 одно и двузначных чисел. Таким образом, нас интересует первая цифра числа 700, то есть ответ 7.

Ответ: цифра 7.

10. (9 баллов) Сколько раз в течение суток часовая и минутная стрелки составляют прямой угол?

Варианты ответов: (A) 8; (B) 22; (C) 24; (D) 44; (E) 48.

Решение

В сутки часовая стрелка делает 2 оборота, а минутная — 24. Отсюда минутная стрелка обгоняет часовую 22 раза и каждый раз с часовой стрелкой образуется по два прямых угла, т. е. ответ — 44.

11.(4 балла) Познакомимся с тремя людьми: Азаматом, Борисом и Болотом. Один из них аптекарь, другой-бухгалтер, третий- агроном. Один живет в Бишкеке, другой – в Баткене, третий- в Андижане. Требуется выяснить, кто где живет и у кого какая профессия. Известно лишь, что:

1. Болот бывает в Бишкеке лишь наездами и то, весьма редко, хотя все его родственники постоянно живут в столице;
2. У двух из этих людей названия профессий и городов, в которых они живут, начинаются с той же буквы, что и их имена;
3. Жена аптекаря доводится Болоту младшей сестрой.

Отвечая на поставленные вопросы, заполните соответствующую таблицу в листе ответов.

Решение

Заполним следующую таблицу, где +это “да”, а - “нет”

	агроном	аптекарь	бухгалтер	Андижан	Бишкек	Баткен
Азамат	+	-	-	+	-	-
Борис	-	+	-	-	+	-
Болот	-	-	+	-	-	+

Из (1) и (3) ясно, что Болот родом не из Бишкека и не аптекарь. Также из (1) и (3) следует, что аптекарь живет в Бишкеке и

название профессии и города у него не совпадают. Значит они совпадают у агронома и бухгалтера. Тогда Болот – бухгалтер, который живет в Баткене, а Азамат – агроном, который живет в Андижане. Следовательно, Борис – аптекарь, который живет в Бишкеке.

Ответ:

Имя	Профессия	Город
Азамат	агроном	Андижан
Борис	аптекарь	Бишкек
Болот	бухгалтер	Баткен

12. (7 баллов) Лотерея. На каждой из десяти карточек написали по одному целому числу от 1 до 10. Карточки бросили в шляпу и попросили пять обладателей выигрышных билетов вытянуть по две карточки. К сожалению, при записи результатов лотереи произошла ошибка. В то время как один из членов тиражной комиссии называл вслух числа, стоявшие на извлеченных из шляпы карточках, другой член комиссии вместо самих чисел по ошибке записывал их сумму. Поэтому результаты в протоколе выглядели так: Эмиль – 11, Федор – 4, Хасан – 7, Медер – 16, Владимир – 17. Между тем каждый из пяти участников лотереи должен получить по два приза в соответствии с числами на вытасканных им карточках.

Установите, какие два числа выпали каждому участнику лотереи. Результаты Вашего анализа внесите в соответствующую таблицу листа ответов.

Решение

Используем табличный способ. Для Федора возможен только вариант 1 и 3. Поставим плюсики в соответствующих клетках, в остальных — крестики.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Эмиль 11	x		x							
Федор 4	+	x	+	x	x	x	x	x	x	x
Хасан 7	x		x							
Медер 16	x		x							
Владимир 17	x		x							

После этого становится понятно, что на карточках Хасана 2 и 5:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Эмиль 11	x	x	x		x					
Федор 4	+	x	+	x	x	x	x	x	x	x
Хасан 7	x	+	x	x	+	x	x	x	x	x
Медер 16	x	x	x		x					
Владимир 17	x	x	x		x					

Далее, у Эмиля: 4 и 7:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Эмиль 11	x	x	x	+	x	x	+	x	x	x
Федор 4	+	x	+	x	x	x	x	x	x	x
Хасан 7	x	+	x	x	+	x	x	x	x	x
Медер 16	x	x	x	x	x		x			
Владимир 17	x	x	x	x	x		x			

Поэтому, у Медера 6 и 10, и, следовательно, у Владимира 8 и 9:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Эмиль 11	х	х	х	+	х	х	+	х	х	х
Федор 4	+	х	+	х	х	х	х	х	х	х
Хасан 7	х	+	х	х	+	х	х	х	х	х
Медер 16	х	х	х	х	х	+	х	х	х	+
Владимир 17	х	х	х	х	х	х	х	+	+	х

13.(9 баллов) Культурные развлечения. Вчера вечером

- 1) Андрей отправился на концерт
- 2) Борис провел все время с Ольгой
- 3) Чингиз так и не увиделся с Рахат
- 4) Перизат побывала в кино
- 5) Рахат посмотрела спектакль в театре
- 6) Какая-то пара посетила художественную выставку

Кроме тех, кого мы уже назвали, постоянными членами той же компании были Даниил и Щербет. Вместе с каждым юношей на том же виде культурных развлечений присутствовала одна девушка. Кто с кем был и где? Результаты Вашего анализа внесите в соответствующую таблицу листа ответов.

Решение

Для Андрея, Перизат и Рахат все ясно из условий задачи 1,4 и 5, они посетили концерт, кино и спектакль в театре соответственно. Из условия 6 известно, что какая-то пара посетила художественную выставку, можно заключить что это Борис и Ольга, из условия 2: Борис провел все время с Ольгой. Теперь отыщем пары Андрея, Перизат и Рахат, принимая во внимание, что вместе с каждым юношей на том же виде культурных развлечений присутствовала одна девушка. Начнем с пары для Рахат, из условия 3 известно, что Чингиз так и не увиделся с Рахат, тогда с Рахат пошел Даниил, следовательно, Чингиз пошел с Перизат, и соответственно, Щербет пошла с Андреем.

Заполним следующую таблицу, где +это “да”, а - “нет”

	концерт	кино	спектакль в театре	художественная выставка
Андрей	+	-	-	-
Перизат	-	+	-	-
Рахат	-	-	+	-
Борис	-	-	-	+
Ольгой	-	-	-	+
Чингиз	-	+	-	-
Даниил	-	-	+	-
Щербет	+	-	-	-

14.(9 баллов) Расследование. Произошла кража и было задержано трое подозреваемых. Один из них (вор) лжет систематически, другой (соучастник) иногда лжет, а иногда говорит правду; последний (подозреваемый напрасно) вообще никогда не лжет. Дознание началось с вопросов о профессии для каждого из задержанных. Их ответы были такими.

Бертран: я маляр, Альфред - настройщик роялей, Шарль - декоратор.

Альфред: я врач, Шарль – страховой агент. Что касается Бертрана, то если вы его спросите, он ответит, что он маляр.

Шарль: Альфред настраивает рояли, Бертран – декоратор, а я страховой агент.

Судья, ведущий допрос, хотел бы знать профессию соучастника. Помогите ему. Ваш ответ запишите в соответствующем месте листа ответов.

Решение

Альфред сказал: «Что касается Бертрана, то если вы его спросите, он вам ответит, что он маляр». Это правда. Значит, Альфред не вор. Если он соучастник, то утверждения Бертрана и Шарля полностью противоположны. Но это не так, поскольку оба они утверждают, что Альфред — настройщик

ролей. Следовательно, Альфред, который не вор и не соучастник, не виноват. Значит, он говорит только правду. Поэтому Шарль — страхового агент. Это совпадает с тем, что говорит сам Шарль. Следовательно, Шарль может быть только соучастником: соучастник работает страховым агентом.

15.(9 баллов) Кто разбил окно? Фарид, Дима, Леонид и Шерали играли на улице в футбол, как вдруг неудачно посланный мяч попал в окно. От удара стекло разбилось. Расспросы ребят позволили выяснить следующее (вот показания виновников происшествия):

Фарид: В окно попал не я. Это Шерали предложил играть в футбол на улице. Леонид не виноват.

Дима: Мячом в окно попал не я. Это сделал Леонид. Я умею играть в футбол лучше, чем Шерали.

Леонид: Последний удар по мячу нанес не я. Если бы я знал, чем все это кончится, ни за что бы не стал бы играть в футбол с ребятами. . Фарид не виноват.

Шерали: Окно разбил не я. Это сделал Леонид. Когда я пришел, игра была в полном разгаре.

Выяснилось, что каждый из ребят дал два правильных и одно ложное показание. Кто разбил окно? Ваш ответ запишите в соответствующем месте листа ответов.

Решение

Нетрудно заметить, что показания Фариды сильно противоречат показаниям Шерали. Высказывания “Леонид не виноват.” И “Леонид виноват.” имеют противоположный смысл. Следовательно, одно из них ложно, а другое истинно. Несколько иначе обстоит дело с высказываниями “ Это Шерали предложил играть в футбол на улице” и “Когда я пришел, игра была в полном разгаре.”: по крайней мере одно из них ложно. Таким образом, из этих четырех высказываний по крайней мере два заведомо ложных. Однако поскольку

каждый из ребят дал лишь одно ложное показание, то по принципу коробки отсюда следует, что в четырех приведенных выше показаниях Фарид и Шерали допустили по одному ложному высказыванию. Значит, остальные высказывания истинны. Итак, утверждения “В окно попал не я” и “Окно разбил не я” также истинны: ни Фарид, ни Шерали не виноваты. С другой стороны, если высказывание Димы “Это сделал Леонид” истинно, то его высказывание “Мячом в окно попал не я” также должно быть истинным. Если же высказывание Димы “Это сделал Леонид” ложно, то его высказывание “Мячом в окно попал не я” тем не менее истинно, поскольку Дима мог солгать лишь один раз. Таким образом, высказывание “Мячом в окно попал не я” истинно в любом случае, окно разбил не Дима. Из двух полученных выводов следует лишь одно заключение: окно разбил Леонид.



МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА 2014

ПЕРВЫЙ ТУР

1. (5 баллов) Работая вместе, Амина, Дима и Рузиали могут нарезать морковь для плова за 9 минут. Если эту работу будет выполнять один из них, то Амина может выполнить ее за 18 минут, Рузиали — за 22 минуты. За какое время может нарезать морковь Дима?

Варианты ответов: (A) 95; (B) 97; (C) 99; (D) 103; (E) 105.

Решение

Эту задачу можно рассматривать, как задачу на наименьшее общее кратное. Понятно, что за 198 минут Амина может выполнить эту работу $198:18 = 11$ раз, Рузиали — может $198:22 = 9$ раз, а все трое вместе могут $198:9 = 22$ раза. Таким образом получается, что за 198 минут Дима может выполнить эту работу: $22 - (11 + 9) = 2$ раза. Соответственно, один раз за $198:2 = 99$ минут.

2. (5 баллов) Решить следующую систему уравнений и записать сумму этих решений:

$$\frac{xy}{x+y} = \frac{8}{3}, \quad \frac{yz}{y+z} = \frac{12}{5}, \quad \frac{xz}{x+z} = \frac{24}{7}.$$

Варианты ответов: (A) 10; (B) 12; (C) 14; (D) 16; (E) 18.

Решение

Перевернув уравнения, получим систему

$$\begin{cases} \frac{x+y}{xy} = \frac{3}{8}; \\ \frac{y+z}{yz} = \frac{5}{12}; \\ \frac{x+z}{xz} = \frac{7}{24}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{3}{8}; \\ \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{5}{12}; \\ \frac{1}{z} + \frac{1}{x} = \frac{7}{24}. \end{cases}$$

Полученную систему можно решать разными способами. Возможно, самый простой: сложить все уравнения. Тогда:

$$2\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) = \frac{3}{8} + \frac{5}{12} + \frac{7}{24} \Leftrightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{13}{24}.$$

Вычитая из полученного выражения первое уравнение системы, получим:

$$\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) - \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) = \frac{13}{24} - \frac{3}{8} \Leftrightarrow \frac{1}{z} = \frac{1}{6}. \text{ Поэтому, } z = 6.$$

Действуя так же, получим $\frac{1}{x} = \frac{13}{24} - \frac{5}{12} \Leftrightarrow \frac{1}{x} = \frac{1}{8} \Leftrightarrow x = 8$;

$$\frac{1}{y} = \frac{13}{24} - \frac{7}{24} \Leftrightarrow \frac{1}{y} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow y = 4. \text{ Следовательно,}$$

$$x + y + z = 8 + 4 + 6 = 18.$$

3. (7 баллов) Найти максимальное вещественное число K , для которого существуют решения неравенства:

$$\sqrt{x-3} + \sqrt{6-x} \geq K.$$

Варианты ответов:

$$(A) \sqrt{6} - \sqrt{3}; (B) \sqrt{3}; (C) \sqrt{6}; (D) 2\sqrt{3}; (E) \sqrt{6} + \sqrt{3}.$$

Решение

Область допустимых значений неравенства

определяется системой неравенств: $\begin{cases} x-3 \geq 0; \\ 6-x \geq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3; \\ 6 \geq x. \end{cases}$

Вычислим производную:

$$(\sqrt{x-3} + \sqrt{6-x})' = \frac{1}{2\sqrt{x-3}} - \frac{1}{2\sqrt{6-x}} = \frac{\sqrt{6-x} - \sqrt{x-3}}{2\sqrt{x-3} \cdot \sqrt{6-x}}.$$

Она равна нулю при $x = 4,5$.

Несложно убедиться в том, что это точка максимума.

Следовательно, максимум выражения $\sqrt{x-3} + \sqrt{6-x}$ — решение задачи, это число: $\sqrt{4,5-3} + \sqrt{6-4,5} = 2\sqrt{1,5} = \sqrt{6}$.

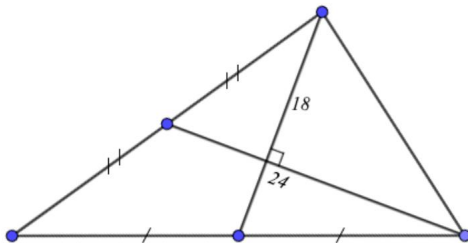
4. (7 баллов) Найдите площадь треугольника, в котором две медианы взаимно перпендикулярны и равны 18 и 24.

Варианты ответов:

$$(A) 168; (B) 216; (C) 288; (D) 324; (E) 432.$$

Решение

Свойство медианы треугольника: делит треугольник на два равных треугольника. Точкой пересечения медиан каждая медиана делится на отрезки, длины которых относятся как 2:1, начиная от вершины.



Тогда, площадь одного из двух треугольников, на которые исходный треугольник делит медиана длиной 24 равна :

$$S = \frac{1}{2} \cdot 24 \cdot \left(18 \cdot \frac{2}{3} \right) = 12 \cdot 12 = 144 .$$

Поэтому, площадь всего исходного треугольника равна $2 \cdot 144 = 288$.

5. (8 баллов) Сколькими способами можно разменять купюру в 20 сомов монетами достоинством в 1, 3 и 5 сомов?

Варианты ответов: (A) 12; (B) 16; (C) 18; (D) 20; (E) 24.

Решение

Можно решать перебором, взяв за основу количество 5-ти сомовых купюр.

- 1) $5c \cdot 4 + 3c \cdot 0 + 1c \cdot 0 = 20$ сомов — 1 вариант;
- 2) $5c \cdot 3 + 3c \cdot 1 + 1c \cdot 2 = 20$ сомов; $5c \cdot 3 + 3c \cdot 0 + 1c \cdot 5 = 20$ сомов — 2 варианта;
- 3) $5c \cdot 2 + 3c \cdot 3 + 1c \cdot 1 = 20$ сомов; $5c \cdot 2 + 3c \cdot 2 + 1c \cdot 4 = 20$ сомов; $5c \cdot 2 + 3c \cdot 1 + 1c \cdot 7 = 20$ сомов; $5c \cdot 2 + 3c \cdot 0 + 1c \cdot 10 = 20$ сомов — 4 варианта.

Можно продолжить процесс, но можно остановиться, подумать и понять, что каждый раз число вариантов определяется числом вариантов, которыми можно взять купюру достоинством 3 сома. Поэтому, когда берем одну 5-ти сомовую купюру, то вариантов будет 6, а вариантов без 5-ти

сомовых купюр будет 7. Следовательно, всего вариантов размена купюры в 20 сомов: $1 + 2 + 4 + 6 + 7 = 20$.

6. (8 баллов) Город имеет вид прямоугольника, разделенного улицами на квадраты. Таких квадратов в направлении север-юг 5, а в направлении восток-запад 7. Сколько различных кратчайших дорог связывают одну из вершин прямоугольника с противоположной?

Варианты ответов:

(A) 788; (B) 790; (C) 792; (D) 794; (E) 796.

Решение

Количество таких дорог будет равно количеству последовательностей, состоящих из 5 букв В и семи букв Г. Здесь каждая буква В означает движение по направлению север-юг, каждая буква Г — по направлению восток-запад. Следовательно, искомое число равно

$$C(12; 7) = \frac{12!}{7! \cdot 5!} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 792.$$

7. (8 баллов) Сколькими способами множество, состоящее из 10 различных предметов, можно разделить на два непересекающихся непустых подмножества?

Варианты ответов:

(A) 123; (B) 259; (C) 385; (D) 511; (E) 637.

Решение

Для каждого предмета есть два варианта: оказаться в первом множестве или оказаться во втором множестве. Всего: $2^{10} = 1024$ варианта. Среди них два варианта с пустым

множеством: все в первом и все во втором. Далее, каждый вариант имеет своего двойника. Например, первый предмет в первом множестве, все остальные во втором и наоборот, первый предмет во втором множестве и все остальные в первом. Поэтому, количество искомых способов: $1022/2 = 511$.

8. (8 баллов) Найти наименьшее значение функции:

$$f(x) = |x - 1| + |x + 1| + |x - 2|.$$

Варианты ответов:

(A) 2; (B) 3; (C) 4; (D) 5; (E) 6.

Решение

Точки 1, -1 и 2 разбивают ось OX на четыре множества. Найдем наименьшее значение на каждом.

$(x \leq -1)$ На этом множестве

$f(x) = -(x - 1) - (x + 1) - (x - 2) = 2 - 3x$. Это убывающая линейная функция. Поэтому, наименьшее значение достигается в крайней правой точке: $f(-1) = 2 - 3(-1) = 5$.

$(-1 \leq x \leq 1)$ На этом множестве

$f(x) = -(x - 1) + (x + 1) - (x - 2) = 4 - x$. Это убывающая линейная функция. Поэтому, наименьшее значение достигается в крайней правой точке: $f(1) = 4 - 1 = 3$.

$(1 \leq x \leq 2)$ На этом множестве

$$f(x) = (x - 1) + (x + 1) - (x - 2) = x + 2.$$

Это возрастающая линейная функция. Поэтому, наименьшее значение достигается в крайней левой точке: $f(1) = 1 + 2 = 3$.

$(2 \leq x)$ На этом множестве

$$f(x) = (x - 1) + (x + 1) + (x - 2) = 3x - 2.$$

Это возрастающая линейная функция. Поэтому, наименьшее значение достигается в крайней левой точке:

$$f(2) = 3 \cdot 2 - 2 = 4.$$

Таким образом, ответ: 3.

9. (8 баллов) Для нумерации страниц словаря потребовалось 2322 цифры. Сколько страниц содержит этот словарь?

Варианты ответов:

(A) 810; (B) 812; (C) 814; (D) 816; (E) 818.

Решение

Однозначных чисел ровно 9, двузначных $99 - 9 = 90$, трёхзначных $999 - 99 - 9 = 900$ и так далее. Однозначными числами Первые 9 страниц занумерованы 9 цифрами, следующие 90 страниц: $90 \cdot 2 = 180$ цифрами. Так как 900 трёхзначных чисел содержат $900 \cdot 3 = 2700$ цифр, последняя страница имеет трёхзначный номер. На трёхзначные номера использовано: $2322 - (9 + 180) = 2133$ цифры. Они составляют 711 трёхзначных чисел. Первое трёхзначное число 100. Значит ответ: 810.

События следующих задач происходят на острове, заселенном рыцарями и лжецами. Как водится, рыцари всегда говорят правду, а лжецы всегда лгут. Ваша задача – ловить на острове заезжих шпионов. Шпионы – нормальные люди, которые могут лгать или говорить правду, в зависимости от своей выгоды.

10. (5 баллов) На острове были арестованы три человека - *A*, *B*, *C*. Следователям известно, что один из них рыцарь, один лжец и один шпион. Во время расследования они сделали следующие заявления:

A: *C* – лжец; *B*: *A* – рыцарь; *C*: Я шпион.

Так кто же из троих шпион, кто рыцарь и кто лжец?

Варианты ответов: а) *A* - рыцарь, *B* - лжец, *C* – шпион;
б) *A* - рыцарь, *B* - шпион, *C* – лжец;

- с) A - лжец, B - рыцарь, C – шпион;
 d) A - лжец, B - шпион, C – рыцарь;
 e) A - шпион, B - лжец, C – рыцарь;
 f) A - шпион, B - рыцарь, C – лжец.

Решение

C заведомо не может быть рыцарем, так как ни один рыцарь не стал бы лгать и утверждать, будто он шпион. Следовательно, C либо лжец, либо шпион. Предположим, что C шпион. Тогда показание A ложно, значит, A шпион (A не может быть шпионом, так как шпион C) и рыцарем может быть только B . Но если B рыцарь, то как он мог дать ложные показания, утверждая, будто A рыцарь? Следовательно, предположение о том, что C шпион, приводит к противоречию. Значит, C лжец. Тогда показание B ложно, поэтому B либо лжец, либо шпион. Но так как лжец B , то шпионом должен быть A . Следовательно, A может быть только рыцарем. Итак, A - рыцарь, B - шпион и C - лжец.

11. (5 баллов) На острове снова задержали подозрительного человека. Во время разбирательства он сделал ложное и очень глупое заявление, которое тут же изобличило его как шпиона. Что это было за заявление?

Варианты ответов: а) Я не шпион; б) Я рыцарь; с) Я лжец.

Решение

Ложное заявление, изобличающее шпиона, было: "Я лжец". Рыцарь никогда не лжет и поэтому не станет утверждать о себе, будто он лжец. С другой стороны, лжец никогда не говорит правды и не станет признаваться, что он лжец. Только шпион может сделать ложное признание, будто он лжец.

12. (5 баллов) На острове опять задержали подозрительного человека. На допросе он сделал истинное и очень глупое заявление, и был тут же разоблачен. Что он сказал?

Варианты ответов: а) Я не лжец; б) Я не рыцарь; с) Я шпион.

Решение

Истинное заявление, изобличающее шпиона, было: " Я не рыцарь". Рыцарь никогда не лжет и поэтому не станет утверждать о себе, будто он не рыцарь. С другой стороны, лжец никогда не говорит правды и не станет говорит, что он не рыцарь. Только шпион может сделать истинное признание, что он не рыцарь.

13. (7 баллов) На острове задержаны три человека – A , B , C . Следователи располагают точной информацией, что один из них рыцарь, один лжец и один шпион. На допросе A заявил: «Я не шпион». B заявил: «Я шпион». Тогда C спросили: « B действительно шпион?» На самом деле шпионом был C и он дал очень ловкий ответ, с помощью которого избежал разоблачения. Что это был за ответ?

Варианты ответов: а) «Да»; б) «Нет».

Решение

Если бы C ответил на вопрос судьи "да", то тем самым он изобличил себя как шпиона, так как судья (вместе с присяжными) мог бы рассуждать следующим образом:

"Предположим, что B шпион. Тогда все трое обвиняемых дали бы правдивые показания, что невозможно, так как один из них лжец. Следовательно, B не может быть шпионом. Значит, его показание ложно, поэтому B лжец. Показание C также ложно, а поскольку C не лжец (ибо лжец B), то он шпион".

Таким образом, если бы на вопрос судьи C ответил "да", то он был бы изобличен как шпион. Зная это, C благоразумно ответил "нет", лишив тем самым суд возможности установить, шпион ли он. (Суду удалось лишь установить, что либо C рыцарь, а B шпион, либо C лжец, а A шпион, либо C шпион.)

14. (7 баллов) На остров проник знаменитый шпион – Джеймс Бонд. Но, несмотря на весь опыт, он был арестован вместе с двумя коренными жителями острова – рыцарем и лжецом. Давайте снова обозначим всех троих A , B , C . Из всех троих только шпиона зовут Джеймс. На суде обвиняемые дали следующие показания:

A : Меня зовут Джеймс; B : Это правда; C : Джеймс – это я.
Кто из них кто?

- Варианты ответов:
- a) A - рыцарь, B - лжец, C – шпион;
 - b) A - рыцарь, B - шпион, C – лжец;
 - c) A - лжец, B - рыцарь, C – шпион;
 - d) A - лжец, B - шпион, C – рыцарь;
 - e) A - шпион, B - лжец, C – рыцарь;
 - f) A - шпион, B - рыцарь, C – лжец.

Решение

Так как A утверждает, что он шпион, то A либо лжец, либо шпион. Аналогичным образом, так как C утверждает, что он шпион, C либо лжец, либо шпион. Следовательно, из двух подсудимых A и C один лжец, а другой шпион. Значит, B – рыцарь и дал на суде правдивые показания: A – шпион, а C – лжец.

15. (7 баллов) Джеймс Бонд был посажен в тюрьму, но сумел бежать, и, изменив внешность, снова занялся шпионажем. Но и на этот раз он был арестован вместе с рыцарем и лжецом. Как и в прошлой задаче, только шпиона зовут Джеймс. Все трое

(как всегда A , B , C) предстали перед судом и дали следующие показания:

A : Меня зовут Джеймс; B : Это правда; C : Я не Джеймс.
Кто из них кто?

- Варианты ответов:
- a) A - рыцарь, B - лжец, C – шпион;
 - b) A - рыцарь, B - шпион, C – лжец;
 - c) A - лжец, B - рыцарь, C – шпион;
 - d) A - лжец, B - шпион, C – рыцарь;
 - e) A - шпион, B - лжец, C – рыцарь;
 - f) A - шпион, B - рыцарь, C – лжец.

Решение

Если A - Джеймс, то все три показания истинны, что невозможно, так как один из троих подсудимых лжец. Если C - Джеймс, то все три показания ложны, что также невозможно, так как один из троих подсудимых рыцарь. Следовательно, Джеймсом должен быть B .



МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА 2015

ПЕРВЫЙ ТУР

1. Железнодорожный состав длиной в 1 км проходит мимо столба за 1 минуту, на той же скорости проходит через туннель за 5 минут. Какова длина туннеля?

Варианты ответов: (a) 2; (b) 3; (c) 4; (d) 5; (e) 6.

Решение

Железнодорожный состав движется со скоростью 1 км за 1 минуту. Поэтому, за 4 минуты «нос» поезда пройдет от начала до конца туннеля, еще через 1 минуту из туннеля выйдет «хвост» поезда. Итак, длина туннеля 4 км.

2. На дне рождения были дети 7, 8, 9, 10 и 11 лет - всего 14 человек. Пятерым было по 10 лет, но больше всего было 11-летних. Найдите суммарный возраст этих 14 детей.

Варианты ответов: (a) 138; (b) 140; (c) 142; (d) 143; (e) 151.

Решение

Из условий задачи следует, что 11-летних было шесть или больше. Предположив, что их было шесть, сразу получаем решение, так как в этом случае будет по одному ребенку 7, 8 и 9. Поэтому, ответ: $7 \cdot 1 + 8 \cdot 1 + 9 \cdot 1 + 10 \cdot 5 + 11 \cdot 6 = 140$ лет.

3. Из города А в город В вышли Садык и Толя. В то же время, навстречу им из города В вышла Олеся. Все они двигались с

постоянными скоростями. Через 2 часа Олеся встретила Садыка, еще через час – Толю, а еще через 3 часа она пришла в город А. Во сколько раз быстрее Толи шел Садык?

Варианты ответов: (a) 1,5; (b) 2; (c) 2,5; (d) 3; (e) 3,5.

Решение

Оля на весь путь затратила 6 часов. Так как она встретила Толю через 3 часа, у них одинаковые скорости. Оля встретила Садыка через 2 часа: то есть пройдя третью часть расстояния от А до В. Следовательно, за это время, Садык прошел оставшееся расстояние — две трети пути. Таким образом получается, что скорость Садыка в два раза больше скорости Оли, и как следствие, в два раза больше скорости Толи.

4. Том и Гек, работая вместе, могут покрасить забор за 2 часа. Производительность труда Тома в 2 раза больше, чем у Гека. За сколько часов они покрасят забор, если Гек сменит Тома после того, как тот покрасит третью часть забора?

Варианты ответов: (a) 3; (b) 4; (c) 5; (d) 6; (e) 7.

Решение

Обозначим площадь забора S , производительность труда Гека через g . Тогда, производительность труда Тома $2g$ и имеет место уравнение $\frac{S}{g + 2g} = 2$. Отсюда, $g = S/6$.

Следовательно, Гек затратит на покраску забора: $\frac{(2/3)S}{g} = \frac{(2/3)S}{S/6} = 4$ часа; Том: $\frac{(1/3)S}{2g} = \frac{(2/3)S}{2(S/3)} = 1$ час, а всего будет затрачено: $4 + 1 = 5$ часов.

5. Масса фруктов после сушки уменьшилась в два раза. Влажность фруктов до сушки была равна 80%. На сколько процентов изменилось количество воды в этих фруктах?

Варианты ответов: (a) 32,5; (b) 42,5; (c) 52,5; (d) 62,5; (e) 72,5.

Решение

До сушки в 100 единицах фруктов 20 единиц сухого вещества, после сушки, эти 20 единиц в 50 единицах фруктов. Таким образом, было из каждых 80 единиц воды осталось 30. Поэтому, если 80 единиц это 100%, то 30 единиц это 37,5%. Следовательно, количество воды уменьшилась на 62,5%.

6. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x^3 + y^3 = 2, \\ (x + y)xy = 2, \end{cases}$$

в ответе записать разность: $x - y$.

Варианты ответов: (a) 0; (b) 1; (c) 2; (d) 3 (e) 4.

Решение

Все сразу получится, если от первого уравнения системы отнять второе:

$$x^3 + y^3 - (x + y)xy = 0 \Leftrightarrow x^3 + y^3 - (x^2y + y^2x) = 0$$

$$\Leftrightarrow x^3 - x^2y + y^3 - y^2x = 0 \Leftrightarrow x^2(x - y) + y^2(y - x) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - y^2)(x - y) = 0 \Leftrightarrow (x + y)(x - y)^2 = 0.$$

Из второго уравнения исходной системы видно, что $x + y$ отлично от нуля. Поэтому, $x - y = 0$.

7. В контейнере находятся изделия двух видов. Стоимость и вес одного изделия составляют: \$40 и 52 кг – для изделий первого вида, \$60 и 39 кг для изделий второго вида. Общий вес изделий равен 1391 кг. Определите минимально возможную стоимость изделий, находящихся в контейнере.

Варианты ответов: (a) 798; (b) 1070; (c) 1090; (d) 1100; (e) 1110.

Решение

Нужно найти минимум функции $C(x, y) = 40x + 60y$ при условии $52x + 39y = 1391$. При этом x — количество изделий первого вида и y — количество изделий второго вида, должны быть целыми неотрицательными числами. Разделив уравнение на 13, получим $4x + 3y = 107$. Его решения: $(2; 33)$, $(5; 29)$, $(8; 25)$, ..., $(26; 1)$. Подставляя эти значения в функцию $C(x, y) = 40(x + 1,5y)$: $C(2, 33) = 40(2 + 1,5 \cdot 33) = 40 \cdot 51,5$; $C(5, 29) = 40(5 + 1,5 \cdot 29) = 40 \cdot 48,5$; ... обнаружим, что имеет место убывание. Следовательно, минимально возможная стоимость: $C(26, 1) = 40(26 + 1,5 \cdot 1) = 40 \cdot 27,5 = 1100$ долларов.

8. На плоскости лежит прямоугольник со сторонами 616 и 209. Внутри прямоугольника нарисована сетка с квадратными ячейками стороны которых равны 1. Сколько узлов этой сетки лежит на диагонали прямоугольника, если под узлом мы понимаем общую вершину четырех ячеек сетки?

Варианты ответов: (a) 6; (b) 7; (c) 8; (d) 9; (e) 10.

Решение

Нужно разбить исходный прямоугольник на меньшие, подобные ему. Для этого разложим числа 616 и 209 на множители: $616 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 11$; $209 = 19 \cdot 11$. Отсюда получаем, что диагональ исходного прямоугольника будет состоять из

диагоналей 11 маленьких прямоугольников и, поэтому, пройдет через 10 узлов.

9. Сколькими способами 10 яблок можно раздать трем девочкам: Адели, Каныкей и Санире, и при этом удовлетворить следующим условиям: Адель и Каныкей должны получить хотя бы по одному яблоку, а Санира, не меньше двух; кроме того, у Каныкей должно, в итоге, оказаться не больше трех яблок.

Варианты ответов: (a) 10; (b) 13; (c) 16; (d) 18; (e) 21.

Решение

Задачу можно решить перебором: подсчитать количество троек $(k; c; a)$, где $1 \leq k \leq 3$; $c \geq 2$; $a \geq 1$, где $k; c; a$ — количество яблок у Каныкей, Санире и Адель, соответственно.

$(1; 2; 7), (1; 3; 6), \dots, (1; 8; 1)$ — 7 способов;

$(2; 2; 6), (2; 3; 5), \dots, (2; 7; 1)$ — 6 способов;

$(3; 2; 5), (3; 3; 4), \dots, (3; 6; 1)$ — 5 способов.

Ответ: $7 + 6 + 5 = 18$ способов.

10. Сколько решений имеет уравнение

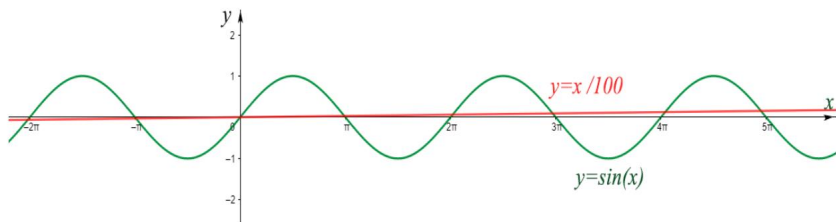
$$100 \cdot \sin x = x ?$$

Варианты ответов: (a) 59; (b) 61; (c) 63; (d) 64; (e) 66.

Решение

Задачу легко решить на графике. Поскольку графики синуса и функции $y=x/100$ симметричны относительно начала координат, то достаточно рассмотреть правую часть графиков. Максимальное значение синуса равно 1. Поэтому точки пересечения графиков будут находиться в пределах тех значений x , для которых $x/100$ не превосходит 1, т. е. в

пределах от 0 до 100. В этом промежутке содержится $100/2\pi$ периодов $\sin x$, $100/2\pi \approx 15,9$. В каждом периоде для $\sin x$ синусоида и график прямой $y=100/x$ имеют две точки пересечения, причём в первой половине периода (рис.). Поэтому в пределах 15,5 периодов будет содержаться 32 точки пересечения графиков. Столько же точек пересечения графиков будет находиться слева от начала координат, но при этом необходимо учесть, что начало координат считается нами два раза. Поэтому всего данное уравнение имеет 63 корня.



Ответ: 63 корня.

Вы находитесь на удивительном острове, все обитатели этого острова никогда не высказывают никаких утверждений; они лишь задают вопросы, причем, только те вопросы, на которые можно ответить только «да» или «нет». Каждый из обитателей острова относится к одному из двух типов – типу *A* или типу *B*. Обитатели типа *A* задают только такие вопросы, правильным ответом на которые является «да». Обитатели типа *B*, задают лишь те вопросы, на которые правильным ответом является «нет». Например, житель типа *A* может спросить: «Равняется ли два плюс два четырем?» Но он никак не может спросить, например, равняется ли два плюс два шести.

11. Вы встречаете жителя этого острова, и он спрашивает Вас: «Принадлежу ли я к типу A ?». Какой вывод Вы можете из этого сделать?

Варианты ответов:

- (a) Житель относится к типу A ,
- (b) Житель относится к типу B ,
- (c) Невозможно определить тип жителя.

Решение

Тут мы не можем прийти ни к какому выводу.

Действительно, любой житель острова может спросить, принадлежит ли он к типу A , поскольку сам он при этом может относиться как к типу A , так и к типу B . Если он относится к типу A , тогда правильным ответом на его вопрос: "Отношусь ли я к типу A ?" - является "да", а человек типа A всегда может задать любой вопрос, правильным ответом на который будет "да". С другой стороны, если островитянин принадлежит к типу B , тогда правильным ответом на поставленный вопрос является "нет", а любой островитянин типа B всегда может задать вопрос, правильным ответом на который будет "нет".

12. Вы встречаете супружескую пару – Виктора и Анну. Случайно Вы слышите, как Виктор спросил кого-то: «Относимся ли мы с Анной к типу B ?». К какому типу относится каждый из супругов?

Варианты ответов:

- (a) Виктор – A , Анна – A ; (b) Виктор – B , Анна – B ;
- (c) Виктор – B , Анна – A ; (d) Виктор – A , Анна – B .

Решение

Прежде всего мы должны выяснить, к какому типу относится Виктор. Предположим, что он принадлежит к типу A . Тогда правильным ответом на его вопрос должно быть "да" (поскольку "да" является правильным ответом на вопросы, задаваемые островами типа A), а это означало бы, что Виктор и Анна оба принадлежат к типу B . Тем самым Виктор относился бы к типу B , и мы пришли бы к противоречию. Следовательно, Виктор не может принадлежать к типу A , а значит, должен относиться к типу B . Далее, поскольку он принадлежит к типу B , правильным ответом на его вопрос будет "нет", и, следовательно, они с Анной принадлежат к разным типам. Поэтому Анна должна относиться к типу A .

13. Вы встречаете двух братьев, которых звали Артур и Роберт, и слышите, как Артур спрашивает Роберта: «Принадлежит ли по крайней мере один из нас к типу B ?». К какому типу относится каждый из братьев?

Варианты ответов:

- (a) Артур – A , Роберт – A ; (b) Артур – B , Роберт – B ;
 (c) Артур – B , Роберт – A ; (d) Артур – A , Роберт – B .

Решение

Допустим, что Артур принадлежит к типу B . Тогда, действительно, по крайней мере один из братьев относился бы к типу B , а это потребовало бы в качестве правильного ответа "да", что в свою очередь означало бы, что Артур принадлежит к типу A . Таким образом, мы приходим к противоречию, и, следовательно, Артур не может принадлежать к типу B . Стало быть, он относится к типу A . Отсюда следует, что правильным ответом на его вопрос является "да", а это означает, что по крайней мере один из братьев принадлежит к типу B . Так как

Артур не принадлежит к типу B , то это должен быть Роберт. Итак, Артур относится к типу A , а Роберт - к типу B .

14. Вы встречаете на острове супружескую пару по фамилии Гордон. Мистер Гордон спрашивает свою жену: «Дорогая, относимся ли мы с тобой к людям разного типа?». Что можно сказать по поводу каждого из супругов?

Варианты ответов: Отметьте правильные ответы крестиком в следующей таблице

	Тип A	Тип B	Невозможно определить тип
Мистер Гордон			
Миссис Гордон			

Решение

По поводу мистера Гордона нельзя сделать никакого вывода, однако миссис Гордон должна принадлежать к типу B . Основания для такого заключения следующие.

Мистер Гордон относится либо к типу A , либо к типу B . Предположим, что он относится к типу A . Тогда правильным ответом на его вопрос является "да", откуда следует, что супруги принадлежат к разным типам. При этом миссис Гордон должна принадлежать к типу B (поскольку ее муж относится к типу A , а они принадлежат к разным типам). Итак, если мистер Гордон относится к типу A , то его жена должна принадлежать к типу B .

Допустим теперь, что мистер Гордон относится к типу B . Тогда правильным ответом на его вопрос будет "нет"; это

означает, что супруги не принадлежат к разным типам, то есть что они относятся к одному и тому же типу. Значит, миссис Гордон тоже относится к типу B . Итак, если мистер Гордон принадлежит к типу B , то и миссис Гордон должна относиться к этому же типу.

Это доказывает, что независимо от того, к какому типу принадлежит мистер Гордон, миссис Гордон обязательно должна принадлежать к типу B .

Другое доказательство - гораздо более простое, но в то же время более изящное - заключается в следующем.

Как мы уже знаем из задачи 11, ни один житель этого острова не может спросить, принадлежит ли он к типу B . Поэтому, если бы миссис Гордон принадлежала к типу A , тогда для островитянина спросить, отличается ли он по типу от миссис Гордон, было бы эквивалентно вопросу, принадлежит ли он к типу B , то есть вопросу, которого он задать не может. Следовательно, миссис Гордон не может принадлежать к типу A .

	Тип A	Тип B	Невозможно определить тип
Мистер Гордон			X
Миссис Гордон		X	

15. На острове Вы сталкиваетесь с островитянином, который спрашивает Вас: - Принадлежу ли я к людям того типа, которые могли бы задать вопрос, что я сейчас задаю? Какое

можно сделать заключение относительно этого островитянина?

Варианты ответов:

- (a) Это житель типа A ; (b) Это житель типа B ;
(c) Тип жителя невозможно определить.

Решение

Поскольку островитянин все-таки задал этот вопрос, то, очевидно, он мог его задать. Следовательно, правильным ответом на его вопрос является "да", а сам он относится к типу A .



МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА 2016

ПЕРВЫЙ ТУР

1. Средний возраст жителей города A равен 32 года, а средний возраст жителей города B равен 45 лет. Одна тысяча жителей города A переселилась в город B . После этого средний возраст жителей в каждом городе уменьшился на два года. Каково общее число жителей в двух городах A и B .

Варианты ответов:

(a) 6500; (b) 7000; (c) 7500; (d) 8000; (e) 8500.

Решение

Обозначим количество жителей города A через a , города B через b , средний возраст переселившихся через x . Тогда будет иметь место система уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{32a - 1000x}{a - 1000} = 30, \\ \frac{45b - 1000x}{b + 1000} = 43, \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 32a - 1000x = 30a - 30000, \\ 45b - 1000x = 43b + 43000. \end{array} \right.$$

Сложив уравнения полученной системы, получим $32a + 45b = 30a + 43b + 13000$. Отсюда, $2a + 2b = 13000$, и $a + b = 6500$.

2. Четырехзначное число заканчивается цифрой 6. Эту цифру переставили в начало числа. Полученное число оказалось на 4239 больше исходного. Какова сумма цифр исходного числа?

Варианты ответов:

(a) 21; (b) 22; (c) 23; (d) 24; (e) 25.

Решение

Запишем исходное число в виде $10x + 6$.

Тогда, из условий задачи, $(6 \cdot 1000 + x) - (10x + 6) = 4239$.
Поэтому, $-9x = -1755$, и $x = 195$. Таким образом, ответ:
 $1 + 9 + 5 + 6 = 21$.

3. Катер, плывя вверх по реке, потерял под мостом буй. Обнаружив потерю через 10 минут, он повернул обратно и нагнал буй на расстоянии 1 км от моста. Определите скорость течения реки (в км/час).

Варианты ответов:

(a) 2,5; (b) 3; (c) 3,5; (d) 4; (e) 4,5.

Решение

Обозначим время, которое катер плыл вниз по реке через t , скорость катера v_1 , скорость реки v_2 . Тогда, с учетом того, что 10 минут это $1/6$ часа, имеет место уравнение:

$$v_2 \left(t + \frac{1}{6} \right) = (v_1 + v_2)t - (v_1 - v_2) \frac{1}{6}.$$

После того как раскроем

скобки и приведем подобные члены, получится уравнение

$$v_1 t - v_1 \frac{1}{6} = 0. \text{ Следовательно, } t = \frac{1}{6}.$$

Так как $v_2 \left(t + \frac{1}{6} \right) = v_2 \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{6} \right) = v_2 \cdot \frac{1}{3} = 1$, получаем, что

скорость течения реки равна 3 км/час.

4. Заряда аккумулятора мобильного телефона Бакыта хватает либо на 10 часов разговора и прослушивания музыки, либо на 190 часов ожидания. Когда Бакыт сел в поезд, его телефон

был полностью заряжен и полностью разряжен, когда он выходил из поезда. Известно, что Бакыт говорил по телефону и слушал музыку ровно половину времени поездки, а остальное время телефон находился в режиме ожидания. Какова была продолжительность поездки Бакыта?

Варианты ответов:

(a) 16; (b) 17; (c) 18; (d) 19; (e) 20.

Решение

Обозначим величину заряда аккумулятора через v . Тогда, скорость, с которой разряжается телефон Бакыта при разговоре равна $v/10$, и $v/190$ — в режиме ожидания.

Поэтому, имеет место уравнение $\frac{v}{10} \cdot \frac{t}{2} + \frac{v}{190} \cdot \frac{t}{2} = v$, где t

продолжительность поездки.

Разделив его на t и решив полученное уравнение, найдем, что $t = 19$.

5. Влажность фруктов после сушки стала 10%, при этом масса фруктов уменьшилась на 25%. Какова была влажность фруктов перед сушкой?

Варианты ответов:

(a) 30; (b) 31,5; (c) 32,5; (d) 33,5; (e) 35.

Решение

Каждые 100 единиц фруктов после сушки превращаются в 75 единиц, в которых 7,5 единиц воды. То есть испарились 25 единиц воды из $25 + 7,5 = 32,5$ единиц. Следовательно, исходная влажность 32,5%.

6. Найти наименьшее значение функции:

$$f(x) = |x-1| + |x+2| + |x-3|.$$

Варианты ответов: (a) 2; (b) 3; (c) 4; (d) 5; (e) 7.

Решение

Точки 1, -2 и 3 разбивают ось OX на четыре множества. Найдем наименьшее значение на каждом.

$(x \leq -2)$ На этом множестве

$f(x) = -(x-1) - (x+2) - (x-3) = 2 - 3x$. Это убывающая линейная функция. Поэтому, наименьшее значение достигается в крайней правой точке:

$$f(-2) = 2 - 3(-2) = 8.$$

$(-2 \leq x \leq 1)$ На этом множестве

$f(x) = -(x-1) + (x+2) - (x-3) = 6 - x$. Это убывающая линейная функция. Поэтому, наименьшее значение достигается в крайней правой точке: $f(1) = 6 - 1 = 5$.

$(1 \leq x \leq 3)$ На этом множестве

$f(x) = (x-1) + (x+2) - (x-3) = x + 4$. Это возрастающая линейная функция. Поэтому, наименьшее значение достигается в крайней левой точке: $f(1) = 1 + 4 = 5$.

$(3 \leq x)$ На этом множестве

$f(x) = (x-1) + (x+2) + (x-3) = 3x - 2$. Это возрастающая линейная функция. Поэтому, наименьшее значение достигается в крайней левой точке:

$$f(3) = 3 \cdot 3 - 2 = 7.$$

Таким образом, ответ: 5.

P.S. Сравните задачу с задачей 8 первого тура 2014 года. Попробуйте обобщить.

7. Функция $f(x)$ удовлетворяет соотношению

$$2f(x) + f(x^2 - 1) = 2016 \text{ при всех действительных значениях } x.$$

Найти величину $f(\sqrt{2})$

Варианты ответов:

(a) 608; (b) 624; (c) 640; (d) 656; (e) 672.

Решение

Подставив вместо x противоположное значение $-x$, получим $2f(-x) + f((-x)^2 - 1) = 2016$. Поэтому, в результате вычитания, из системы

$$\begin{cases} 2f(x) + f(x^2 - 1) = 2016, \\ 2f(-x) + f(x^2 - 1) = 2016 \end{cases} \text{ получим, } f(x) = f(-x).$$

Далее, подставляя в исходное уравнение $x = 0$ и $x = 1$, получим систему

$$\begin{cases} 2f(0) + f(0^2 - 1) = 2016, \\ 2f(1) + f(1^2 - 1) = 2016, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2f(0) + f(1) = 2016, \\ 2f(1) + f(0) = 2016, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(0) - f(1) = 0, \\ 2f(1) + f(0) = 2016, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(0) = f(1), \\ f(1) = 672. \end{cases}$$

Осталось подставить $x = \sqrt{2}$ в исходное уравнение:

$$\begin{aligned} 2f(\sqrt{2}) + f(2 - 1) = 2016 &\Rightarrow 2f(\sqrt{2}) + 672 = 2016 \Rightarrow \\ \Rightarrow 2f(\sqrt{2}) = 1344 &\Rightarrow f(\sqrt{2}) = 672. \end{aligned}$$

8. Кусок мыла имеет форму параллелепипеда. Таалай заметил, что после 38 дней регулярного использования, каждое ребро этого параллелепипеда уменьшилось на треть первоначальной длины. На сколько дней ему хватит оставшегося куска мыла?

Варианты ответов:

(a) 10; (b) 12; (c) 14; (d) 16; (e) 18.

РешениеОбъем параллелепипеда равен abc , где a, b, c длины егоребер. После 38 дней осталось: $\frac{2}{3}a \cdot \frac{2}{3}b \cdot \frac{2}{3}c = \frac{8}{27}abc$. То естьза 38 дней использована $\frac{19}{27}$ частей исходного куска мыла.Соответственно, каждый день тратилось $\frac{19}{27} : 38 = \frac{1}{54}$ мыла, аоставшегося куска хватит на $\frac{8}{27} : \frac{1}{54} = \frac{8 \cdot 54}{27} = 16$ дней.

9. Над цепью озер летела стая белых лебедей. На каждом озере садилась половина лебедей и еще пол лебедя, а остальные летели дальше. Все лебеди сели на семи озерах. Сколько лебедей было в стае?

Варианты ответов:

(a) 126; (b) 127; (c) 128; (d) 130; (e) 132.

РешениеЕсли через x_n обозначить число лебедей улетевших созера с номером n , то получим уравнение $x_n = \frac{1}{2}x_{n-1} - \frac{1}{2}$. Егоможно переписать в виде: $x_{n-1} = 2x_n + 1$. Теперь, приняв во внимание то, что $x_7 = 0$, последовательно можно выписать: $x_6 = 2 \cdot 0 + 1 = 1$; $x_5 = 2 \cdot 1 + 1 = 3$; $x_4 = 2 \cdot 3 + 1 = 7$; $x_3 = 2 \cdot 7 + 1 = 15$; $x_2 = 2 \cdot 15 + 1 = 31$; $x_1 = 2 \cdot 31 + 1 = 63$.И наконец, если с первого озера улетели 63 лебедя, то на него сели: $x_0 = 2 \cdot 63 + 1 = 127$.

10. Сколькими способами девять яблок могут быть распределены между тремя школьниками Бексултаном, Равшаном и Вячеславом, при условии, что Бексултан должен получить не более чем четыре яблока, а Равшан – не менее двух?

Варианты ответов: (a) 18; (b) 22; (c) 26; (d) 30; (e) 34.

Решение

Задачу можно решить путем перебора, выписав все возможные тройки вида

(Б; Р; В), где буква Б обозначает количество яблок полученных Бексултаном, Р — Равшаном, В — Вячеславом.
 (0; 2; 7), (0; 3; 6), (0; 4; 5), (0; 5; 4), (0; 6; 3), (0; 7; 2), (0; 8; 1),
 (0; 9; 0) — 8 вариантов;
 (1; 2; 6), (1; 3; 5), (1; 4; 4), (1; 5; 3), (1; 6; 2), (1; 7; 1), (1; 8; 0)
 — 7 вариантов.

Можно продолжить выписывать варианты, а можно уже догадаться, что вариантов вида

(2; Р; В) будет 6; вариантов вида (3; Р; В) будет 5; вариантов вида (4; Р; В) будет 4.

Поэтому, ответ: $8 + 7 + 6 + 5 + 4 = 30$.

Предположим, что вы находитесь в лесу, каждый обитатель которого либо рыцарь, либо лжец. (Как всегда в логических задачах, рыцари всегда говорят правду, а лжецы всегда лгут.) Кроме того, в лесу водятся оборотни, которые иногда превращаются в волков и нападают на людей. Оборотень может быть либо рыцарем, либо лжецом.

11. Вы берете интервью у трех обитателей леса А, В, С. Известно, что ровно один из них оборотень. В беседе с вами они заявляют:

A: *C* - оборотень.

B: Я не оборотень.

C: По меньшей мере двое из нас лжецы.

Если бы вам предстояло выбрать одного из трех обитателей леса в попутчики и вопрос о том, не окажется ли ваш товарищ оборотнем, волновал бы вас сильнее, чем вопрос, не окажется ли он лжецом, то на ком из трех вы бы остановили свой выбор?

Варианты ответов: (a) *A*, (b) *B*, (c) *C*.

Решение

C - либо рыцарь, либо лжец. Предположим, что *C* - рыцарь. Тогда по крайней мере двое из трех обитателей леса - лжецы. Следовательно, ими должны быть *A* и *B*. Отсюда мы заключаем, что *B* - оборотень (так как, по его словам, он не оборотень, а по доказанному *B* - лжец). Итак, если *C* - рыцарь, то оборотень - лжец (так как им должен быть *B*). Предположим теперь, что *C* - лжец. Тогда неверно, что по крайней мере два из трех обитателей леса - лжецы, поэтому среди них есть самое большее один лжец. Этим лжецом должен быть *C*. Следовательно, и *A*, и *B* - рыцари. Так как *A* - рыцарь и утверждает, что *C* - оборотень, то *C* действительно оборотень. Таким образом, и в этом случае оборотень - лжец (а именно *C*). Следовательно, независимо от того, рыцарь ли *C* или лжец, оборотень лжец (хотя в каждом случае речь идет о другом лице). Итак, ответ на первый вопрос гласит: оборотень - лжец. Кроме того, мы доказали, что оборотнем может быть либо *B*, либо *C*. Следовательно, если вы хотите выбрать себе попутчика, который заведомо не был бы оборотнем, то вам следует остановить свой выбор на *A*.

12. Вы снова берете интервью у трех обитателей леса *A*, *B* и *C*. Известно, что каждый из них либо рыцарь, либо лжец и среди них имеется ровно один оборотень. В беседе с вами они

заявляют:

A: Я оборотень.

B: Я оборотень.

C: Не более чем один из нас рыцарь.

Проведите полную классификацию *A*, *B* и *C*: отметьте правильные ответы крестиком в следующей таблице.

(Крестик в таблице значит «Да», пустая ячейка - «Нет»)

	Рыцарь	Лжец	Оборотень
<i>A</i>			
<i>B</i>			
<i>C</i>			

Решение

Докажем сначала, что *C* - рыцарь. Предположим, что *C* был бы лжецом. Тогда его первое высказывание было бы ложным, поэтому по крайней мере двое из трех островитян были бы рыцарями. Это означало бы, что *A* и *B* оба должны быть рыцарями (так как по предположению *C* - лжец).

Следовательно, их высказывания были бы истинными, и они оба вопреки условиям задачи были бы оборотнями. Итак, *C* - рыцарь. Тогда ровно двое из трех лжецы. Ими должны быть *A* и *B*. А поскольку их высказывания ложны, то ни *A*, ни *B* не оборотни. Следовательно, оборотнем должен быть *C*. Таким образом, *C* - рыцарь и оборотень, *A* и *B* - лжецы, и ни один из них не оборотень.

	Рыцарь	Лжец	Оборотень
<i>A</i>		X	
<i>B</i>		X	
<i>C</i>	X		X

В трех следующих задачах мы снова встречаем трех обитателей леса A , B , C , каждый из которых либо рыцарь, либо лжец. Заявления делают только двое из них: A и B . В их высказываниях слово "нас" относится ко всем трем героям (к A , B и C), а не только к A и B .

13. Предположим, что A и B заявили следующее:

A : По меньшей мере один из нас рыцарь.

B : По меньшей мере один из нас лжец.

Известно, что по меньшей мере один из них оборотень и ни один не является одновременно рыцарем и оборотнем. Кто оборотень?

Варианты ответов: (a) A , (b) B , (c) C .

Решение

Если бы B был лжецом, то по крайней мере один из трех островитян действительно был бы лжецом. Но тогда его высказывание было бы истинным, и мы пришли бы к противоречию, так как лжецы не говорят правды. Следовательно, B - рыцарь. Тогда высказывание A истинно, и A также должен быть рыцарем. Таким образом, и A , и B - рыцари. Так как B - рыцарь, то его высказывание истинно, поэтому один из трех - рыцарь. Им должен быть C . Следовательно, он и только он оборотень.

14. На этот раз A и B сделали следующие заявления:

A : По меньшей мере один из нас лжец.

B : C - рыцарь.

Известно, что ровно один из них оборотень и что он рыцарь. Кто оборотень?

Варианты ответов: (a) A , (b) B , (c) C .

Решение

A должен быть рыцарем по тем же самым причинам, по которым в предыдущей задаче был рыцарем B , а именно: если бы A был лжецом, то было бы истинным высказывание о том, что по крайней мере один из трех лжец, и мы пришли бы к противоречию (высказывание лжеца было бы истинным). Так как A - рыцарь, то его высказывание истинно, поэтому по крайней мере один из трех действительно лжец. Если бы B был рыцарем, то (в силу высказывания B) C также был бы рыцарем, и все трое оказались бы рыцарями. Но в истинном высказывании A утверждается, что по крайней мере один из трех - лжец. Следовательно, B должен быть лжецом. А так как B утверждает, что C - рыцарь, то C в действительности лжец. Таким образом, A - единственный рыцарь. Следовательно, A - оборотень.

15. В этой задаче A и B заявили следующее:

A : По меньшей мере один из нас лжец.

B : C - оборотень.

И в этой задаче известно, что ровно один из них оборотень и что он рыцарь. Кто оборотень?

Варианты ответов: (a) A , (b) B , (c) C .

Решение

Из высказывания A следует, что A должен быть рыцарем и по крайней мере один из трех должен быть лжецом. Если бы B был рыцарем, то C был бы оборотнем и, значит, еще одним рыцарем, но тогда трое были бы рыцарями. Следовательно, B - лжец, но тогда C - не оборотень. Поскольку известно, что оборотень - рыцарь, то B также не может быть оборотнем. Значит, оборотень A .



МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА 2017

ПЕРВЫЙ ТУР

1. Имеется 100 маленьких кубиков с ребром 2 см. Из них сооружается самый большой из возможных кубов. Сколько маленьких кубиков останутся неиспользованными?

Варианты ответов:

(a) 16; (b) 21; (c) 25; (d) 32; (e) 36; (f) 45; (g) 49.

Решение

Так как объем наибольшего куба из кубов, объем которых не превышает 100 единиц равен $4^3 = 64$, останутся неиспользованными: $100 - 64 = 36$ кубиков. Длина ребра кубика в данном случае является излишней информацией.

2. В два сосуда налили одинаковое количество жидкости. В итоге, первый заполнен на четверть, второй на треть. Какая часть второго сосуда будет заполнена, если в него перелить всю жидкость из первого сосуда?

Варианты ответов:

(a) $3/8$; (b) $4/9$; (c) $5/9$; (d) $6/9$; (e) $7/9$; (f) $7/8$; (g) $8/9$.

Решение

Не теряя общности, можно считать, что объем первого сосуда 4 л, второго — 3 литра, и в них налито по 1 л жидкости. Ответ: $2/3 = 6/9$.

3. Катер, плывя вниз по реке, потерял под мостом буй. Обнаружив потерю через 15 минут, он повернул обратно и встретил буй на расстоянии 1 км от моста. Определите скорость течения реки (в км/час).

Варианты ответов:

(a) 1,5; (b) 1,75; (c) 2; (d) 2,5; (e) 3; (f) 3,25; (g) 3,5.

Решение

Фактически, повторив решение 3-й задачи первого тура 2016 года, можно получить ответ 2 км/час.

Любопытный вариант решения таких задач связан со следующим рассуждением. Рассматриваем движущуюся систему координат, в которой буй остается на месте. Тогда, катер плывет от буя и к бую одинаковое количество времени. За эти $15 + 15 = 30$ минут = 0,5 часа, мост удаляется от буя, со скоростью равной скорости течения воды, на 1 км. Следовательно, скорость течения реки равна: $1/0,5 = 2$ км/час.

4. Том и Гек красят забор: Гек сменил Тома после того, как тот покрасил третью часть забора, и вся работа была ими выполнена за 10 часов. За сколько часов они покрасят забор, работая вместе, если производительность труда Тома в полтора раза больше, чем у Гека?

Варианты ответов:

(a) 1; (b) 4,5; (c) 2; (d) 2,5; (e) 3; (f) 3,5; (g) 4.

Решение

Обозначив производительность труда Гека через g , а площадь забора — через S , получим уравнение $\frac{S/3}{1,5g} + \frac{2S/3}{g} = 10$. Отсюда, $\frac{4S/3}{1,5g} = 10 \Leftrightarrow \frac{S}{g} = 11,25$. То есть, такой забор Гек может в одиночку покрасить за 11,25 часов.

Работая вместе, Том и Гек могут покрасить такой забор за:

$$\frac{S}{1,5g + g} = \frac{11,25g}{2,5g} = 4,5 \text{ часа.}$$

5. Влажность фруктов после сушки стала 50%, при этом количество воды в фруктах сократилось в 5 раз. Во сколько раз уменьшилась масса этих фруктов?

Варианты ответов:

(a) 2; (b) 2,5; (c) 3; (d) 3,5; (e) 4; (f) 4,5; (g) 5.

Решение

Не теряя общности, можно считать, что количество воды в фруктах после сушки 5 кг. Тогда, и сухой субстанции будет 5 кг, а общая масса фруктов 10 кг. Следовательно, воды до сушки было 25 кг, а масса фруктов до сушки — $5 + 25 = 30$ кг. Таким образом, ответ: $30/10 = 3$.

6. Сколькими способами можно разменять купюру в 20 сомов монетами достоинством в 1, 3 и 5 сомов, при условии, что в каждом таком размене должна присутствовать хотя бы одна монета 3 сома?

Варианты ответов:

(a) 10; (b) 11; (c) 12; (d) 14; (e) 15; (f) 18; (g) 20.

Решение

Задачу можно решить путем перебора, указав все возможные тройки вида (П; Т; Од), где П количество 5-ти, Т — 3-х; Од — 1-но сомовых монет. При этом, П — целое число, меняющееся от нуля до трех включительно.

(3; 1; 2) — один способ;

(2; 3; 1), (2; 2; 4), (2; 1; 7) — три способа;

(1; 5; 0), (1; 4; 3), (1; 3; 6), (1; 2; 9), (1; 1; 12) — пять способов;

(0; 6; 2), ... , (0; 1; 17) — шесть способов.

Таким образом, ответ: $1 + 3 + 5 + 6 = 15$ способов.

7. Сколькими способами множество, состоящее из 11 различных предметов, можно разделить на два непересекающихся непустых подмножества?

Варианты ответов:

(a) 127; (b) 189; (c) 251; (d) 511; (e) 767; (f) 1023; (g) 2047.

Решение

Для каждого предмета есть два варианта: оказаться в первом множестве или оказаться во втором множестве. Всего: $2^{11} = 2048$ вариантов. Среди них два варианта с пустым множеством: все в первом и все во втором. Далее, каждый вариант имеет своего двойника. Например, первый предмет в первом множестве, все остальные во втором и наоборот, первый предмет во втором множестве и все остальные в первом. Поэтому, количество искомых способов: $2046/2 = 1023$.

8. Плоскость покрыта сеткой квадратов со стороной, равной 1. Сколько узлов этой сетки попадают в круг (включая его границу) радиуса 5 с центром в произвольном узле?

Варианты ответов:

(a) 65; (b) 71; (c) 75; (d) 81; (e) 85; (f) 91; (g) 95.

Решение

Разместим начало координат в рассматриваемом узле. Тогда, речь идет о нахождении числа точек с целочисленными координатами, находящихся внутри круга с радиусом 5, то есть количество целочисленных решений неравенства $x^2 + y^2 \leq 25$.

В силу симметрии, достаточно рассматривать только точки из первого квадранта.

Один из самых простых способов решения полученной задачи: метод перебора.

$(0; 0), (1; 0), (2; 0), (3; 0), (4; 0), (5; 0)$ — 6 точек;

$(0; 1), (1; 1), (2; 1), (3; 1), (4; 1)$ — 5 точек;

$(0; 2), (1; 2), (2; 2), (3; 2), (4; 2)$ — 5 точек;

$(0; 3), (1; 3), (2; 3), (3; 3), (4; 3)$ — 5 точек;

$(0; 4), (1; 4), (2; 4), (3; 4)$ — 4 точки;

$(0; 5)$ — 1 точка.

Итого, $6 + 5 + 5 + 5 + 4 + 1 = 26$ точек.

Умножим на 4 — количество квадрантов — и получим 104. Теперь нужно не забыть, что точка $(0; 0)$ при будет посчитана 4 раза, поэтому нужно вычесть 3, а точки у которых одна координата равна 0 будут посчитаны дважды, поэтому нужно отнять еще 20.

Следовательно, ответ: $104 - 3 - 20 = 81$.

9. Все положительные целые числа, начиная с единицы, выписаны подряд в порядке возрастания. Какая цифра стоит на 2017 месте?

Варианты ответов:

(a) 0; (b) 1; (c) 2; (d) 3; (e) 5; (f) 7; (g) 9.

Однозначных чисел ровно 9, двузначных $99 - 9 = 90$, трёхзначных $999 - 99 - 9 = 900$, четырёхзначных 9000 и т.д. Однозначные числа займут в выписанном ряду первые 9 мест, двузначные $90 \cdot 2 = 180$ мест, трёхзначные $900 \cdot 3 = 2700$ мест. Поэтому интересующая нас цифра принадлежит трёхзначному числу. Цифры, принадлежащие не более чем двухзначным числам, имеют номера от 1 до $9 + 180 = 189$. Разность $2017 - 189 = 1828$ нужно разделить на 3 с остатком: $1828 = 3 \cdot 609 + 1$. Итак, выписаны 609 трёхзначных чисел. Кроме них имеются 99 одно и двузначных чисел. Таким образом, нас интересует первая цифра числа 709, то есть ответ 7.

Ответ: цифра 7.

10. Сколько решений имеет уравнение

$$|\sin(\pi x)| = \lg|x| ?$$

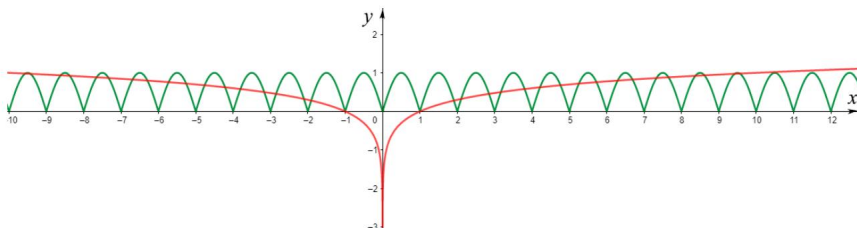
Варианты ответов:

(a) 2; (b) 8; (c) 16; (d) 20; (e) 24; (f) 30; (g) 36.

Решение

В правой и левой частях уравнения стоят четные функции. Поэтому, можно рассмотреть только положительные x . Далее, можно нарисовать эскизы графиков

функций $|\sin(\pi x)|$ и $\lg x$, приняв во внимание то, что $|\sin(\pi x)|$ будет периодической функцией изменяющейся от 0 до 1 на каждом отрезке $[0; 1], [1; 2], \dots, [9; 10]$, а функция $\lg x$ является монотонно возрастающей, с $\lg 0 = 1$ и $\lg 10 = 1$.



Тогда станет понятно, что на каждом из отрезков: $[1; 2], [2; 3], \dots, [9; 10]$, графики функций пересекаются дважды, то есть уравнение имеет по два корня, и как следствие — 18 положительных корней. Далее, приняв во внимание то, что то же самое имеет место и для отрицательных x , получаем ответ: $2 \cdot 18 = 36$.

Задачи 11-15 решаются при следующих предположениях. Предположим, что вы находитесь в Лесу Забывчивости. В этом особом месте постоянно забываются самые простые вещи, вроде дня недели. Кроме того, обитатели Леса тоже очень своеобразные создания. Например, здесь можно встретить Льва и Единорога. Лев лжет по понедельникам, вторникам и средам, а в остальные дни недели говорит правду. Единорог лжет по четвергам, пятницам и субботам и говорит правду во все остальные дни. Есть здесь и два брата-близнеца, Труляля и Траляля, неотличимые друг от друга. Один из них ведет себя точно также как Лев (то есть лжет по понедельникам, вторникам и средам и говорит правду в остальные дни), а другой как Единорог (то есть лжет по

четвергам, пятницам и субботам и говорит правду в остальные дни).

11. Вы встречаете Льва и Единорога и в разговоре с Вами они высказывают следующие утверждения:

Лев: Вчера был один из тех дней, когда я лгу.

Единорог: Вчера был один из тех дней, когда я тоже лгу.

Поскольку Вы опять забыли текущий день недели, Вам надо определить его из этих высказываний и отметить крестиком в таблице.

Пн	Вт	Ср	Чт	Пт	Сб	Вс

Решение

Лев мог сказать, что он лгал накануне, только в понедельник и в четверг. Единорог мог сказать, что он лгал накануне, только в четверг и в воскресенье. Следовательно, они оба могли утверждать, что лгали накануне, только в четверг.

Пн	Вт	Ср	Чт	Пт	Сб	Вс
			X			

12. В другой раз Вы встречаете одного Льва. Он делает следующие высказывания:

1. Я лгал вчера.

2. После завтрашнего дня я буду лгать два дня подряд.

Отметьте крестиком в таблице, в какой день недели это было.

Пн	Вт	Ср	Чт	Пт	Сб	Вс

Решение

Из первого высказывания Льва следует, что Алиса встретила его в понедельник или в четверг. Из второго высказывания следует, что день встречи не четверг. Следовательно, встреча произошла в понедельник.

Пн	Вт	Ср	Чт	Пт	Сб	Вс
X						

13. Отметьте крестиком в таблице дни недели, когда Лев может произнести следующие высказывания:

1. Я лгал вчера.
2. Я буду лгать завтра

Если таких дней нет, оставьте таблицу пустой.

Пн	Вт	Ср	Чт	Пт	Сб	Вс

Решение

Такие утверждения Лев не может высказать ни в один из дней недели. Первое утверждение он мог бы высказать только в понедельник и в четверг, второе - только в среду и в воскресенье. Следовательно, оба утверждения он не мог бы высказать ни в один из дней недели.

Пн	Вт	Ср	Чт	Пт	Сб	Вс

14. Отметьте крестиком в таблице дни недели, когда Лев может высказать следующее единое утверждение «Я лгал вчера и я буду лгать завтра», если такие дни вообще есть, иначе оставьте таблицу пустой.

Пн	Вт	Ср	Чт	Пт	Сб	Вс

Решение

Ситуация в этой задаче весьма отлична от той, с которой мы встретились в предыдущей задаче. На этом примере отчетливо видно различие между двумя отдельными высказываниями и одним сложным высказыванием - их конъюнкцией. Действительно, если заданы любые два высказывания X , Y , то из истинности одного сложного высказывания " X и Y " следует, что истинны оба высказывания X , Y . Если же конъюнкция " X и Y " ложна, то ложно по крайней мере одно из высказываний X , Y .

После этих предварительных замечаний перейдем к решению задачи. Единственный день недели, когда высказывания Льва "Я лгал вчера" и "Я буду лгать завтра" могли бы быть истинными, - вторник (поскольку он и только он попадает между двумя днями, когда Лев лжет). Следовательно, день, когда Лев высказал свое утверждение, не мог быть вторником, так как по вторникам его утверждение истинно, а Лев не высказывает истинных утверждений по вторникам. А раз это было не во вторник, то высказывание Льва ложно, то есть в тот день Лев лжет. Таким образом, приведенное в задаче сложное высказывание Лев мог произнести либо в понедельник, либо в среду.

Пн	Вт	Ср	Чт	Пт	Сб	Вс
X		X				

15. Вы встречаете обоих братьев вместе и они делают следующие высказывания:

Первый: Я Траляля.

Второй: Я Труляля.

Кто из них в действительности был Траляля и Труляля.

Варианты ответов: (а) Первый – Траляля, второй – Труляля.
(б) Первый – Труляля, второй – Траляля.

Решение

Если первое высказывание истинно, то первого братца зовут Траляля. Тогда второго братца зовут Труляля, и второе высказывание также истинно. Если первое высказывание ложно, то первого братца зовут Труляля, второго - Траляля, и, следовательно, второе высказывание также ложно. Таким образом, либо оба высказывания истинны, либо оба высказывания ложны. С другой стороны, оба высказывания не могут быть ложными, так как Траляля и Труляля никогда не лгут в один и тот же день. Следовательно, оба высказывания должны быть истинными. Значит, первого братца зовут Траляля, а второго - Труляля. Алиса встретила их в воскресенье.



МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА 2018

ПЕРВЫЙ ТУР

1. В семье 4 человека. Если Оле удвоят стипендию, то общий доход семьи возрастет на 7%, если вместо этого маме удвоят зарплату – то на 24%, если же зарплату удвоят папе – то на 40%. На сколько процентов возрастет доход всей семьи, если дедушке удвоят пенсию?

Варианты ответов (%):

(a) 16; (b) 18; (c) 21; (d) 25; (e) 29; (f) 34; (g) 39.

Решение

Введем обозначения и получим систему:

$$\begin{cases} 2a + b + c + d = 1,07(a + b + c + d), \\ a + 2b + c + d = 1,24(a + b + c + d), \\ a + b + 2c + d = 1,40(a + b + c + d), \\ a + b + c + 2d = (1 + p)(a + b + c + d), \end{cases}$$

где a, b, c, d — доходы Ольги, мамы, папы и дедушки, соответственно, p — проценты, на которые возрастет доход всей семьи, при удвоении дедушкиной пенсии.

Сложив все уравнения системы, получим

$$5(a + b + c + d) = (1,07 + 1,24 + 1,40 + 1 + p)(a + b + c + d).$$

Поэтому, $5 = 4,71 + p$, и

$$p = 0,29.$$

2. На острове $4/5$ всех женщин замужем и $12/17$ всех мужчин женаты. Какой процент взрослого населения острова состоит в браке?

Варианты ответов (%):

(a) 60; (b) 65; (c) 70; (d) 75; (e) 80; (f) 85; (g) 90.

Решение

Пусть число супружеских пар на острове равно N , то есть замужем N женщин, женаты N мужчин. Замужние женщины составляют $4/5$ всех женщин острова, значит, на острове $(5/4)N$ женщин. Женатые мужчины составляют $12/17$ всех мужчин острова, значит, на острове $(17/12)N$ мужчин.

Всего на острове $\frac{5}{4}N + \frac{17}{12}N = \frac{8}{3}N$ жителей, а в браке

состоит $2N$ жителей. Искомая доля равна $\frac{2N}{\frac{8}{3}N} = 6/8 = 75\%$.

3. Султан и Манучер, посорившись, разбежались в противоположные стороны с одинаковой и постоянной скоростью. После 5 минут бега Манучер решил помириться с Султаном и, повернувшись назад, бросился его догонять увеличив скорость. Во сколько раз Манучер увеличил скорость бега, если он догнал Султана через 4 минуты?

Варианты ответов:

(a) 1,5; (b) 2; (c) 2,5; (d) 3; (e) 3,5; (f) 4; (g) 4,5

Решение

Пусть скорость Султана, и соответственно, начальная скорость Манучера, равна v , а увеличенная скорость

Манучера равна u . Тогда, имеет место уравнение $v(5 + 4) = 4u$. Отсюда, $u = 3,5v$. Ответ: в 3,5 раза.

4. Автомобиль из А в В ехал со средней скоростью 50 км/ч, а обратно возвращался со скоростью 30 км/ч. Какова его средняя скорость?

Варианты ответов (км/ч):

(a) 36; (b) 37,5; (c) 40; (d) 40,5; (e) 42,5; (f) 43,5; (g) 45.

Решение

Пусть расстояние от А до В равно s . Тогда, автомобиль из А в В ехал $s/50$ ч, а обратно вернулся за $s/30$ ч. Следовательно, расстояние $2s$ он проехал за $(s/50 + s/30)$ часов. Поэтому, средняя скорость автомобиля

$$2s : \left(\frac{s}{50} + \frac{s}{30} \right) = 2s : \frac{8s}{150} = \frac{2s \cdot 150}{8s} = 37,5 \text{ км/час.}$$

5. Сколькими способами множество, состоящее из 9 различных предметов, можно разделить на два непересекающихся непустых подмножества?

Варианты ответов:

(a) 127; (b) 189; (c) 255; (d) 510; (e) 512; (f) 1023; (g) 2046.

Решение

Для каждого предмета есть два варианта: оказаться в первом множестве или оказаться во втором множестве. Всего: $2^9 = 512$ вариантов. Среди них два варианта с пустым множеством: все в первом и все во втором. Далее, каждый вариант имеет своего двойника. Например, первый предмет в первом множестве, все остальные во втором и наоборот, первый предмет во втором

множестве и все остальные в первом. Поэтому, количество искомых способов: $510/2 = 255$.

6. Сколькими способами можно рассадить в один ряд 3-х юношей и 3-х девушек, если девушки могут сидеть друг с другом, а юноши нет?

Варианты ответов:

(a) 36; (b) 64; (c) 72; (d) 128; (e) 144; (f) 256; (g) 288.

Решение

Существуют четыре варианта рассадки: ДЮДЮДЮ; ЮДЮДЮД; ЮДДЮДЮ; ЮДЮДДЮ. В каждом из этих вариантов и девушки и парни могут меняться между собой местами. Таким образом, в каждом варианте: $3! \cdot 3! = 6 \cdot 6 = 36$ способов. Ответ: $36 \cdot 4 = 144$.

7. Вычислить следующую сумму при $n = 12$:

$$\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}.$$

Варианты ответов:

(a) 0,495; (b) 0,49; (c) 0,485; (d) 0,48; (e) 0,475 (f) 0,47; (g) 0,465.

Решение

Красивый способ решения: заметить, что

$$\frac{1}{1 \cdot 3} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} \right); \quad \frac{1}{3 \cdot 5} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right); \dots; \quad \frac{1}{23 \cdot 25} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{23} - \frac{1}{25} \right).$$

Тогда,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \\ &= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \dots + \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right) \right] = \\ &= \frac{1}{2} \left[1 - \frac{1}{2n+1} \right] = \frac{1}{2} \cdot \frac{2n}{2n+1} = \frac{n}{2n+1} = 0,48 \end{aligned}$$

8. Для математической олимпиады 30 школьников из 5 различных классов предложили 40 задач. Любые два одноклассника придумали одинаковое число задач, а любые два школьника из разных классов придумали разное число задач. Сколько человек придумало одну задачу?

Варианты ответов:

(a) 2; (b) 6; (c) 10; (d) 14; (e) 18; (f) 22; (g) 26

Решение

Так как школьники из разных классов придумали разное количество задач, таких чисел может быть только 5. Рассмотрев самый простой вариант 1, 2, 3, 4, 5 нетрудно увидеть, что условия задачи будут удовлетворяться только при одно варианте: первый придумал 5 задач; второй — 4 задачи; третий — 3 задачи; четвертый — 2 задачи, а все остальные — их 26, придумали по одной задаче.

9. Все положительные целые числа, начиная с единицы, выписаны подряд в порядке возрастания. Какая цифра стоит на 2018 месте?

Варианты ответов:

(a) 1; (b) 0; (c) 3; (d) 4; (e) 5; (f) 8; (g) 7.

Решение

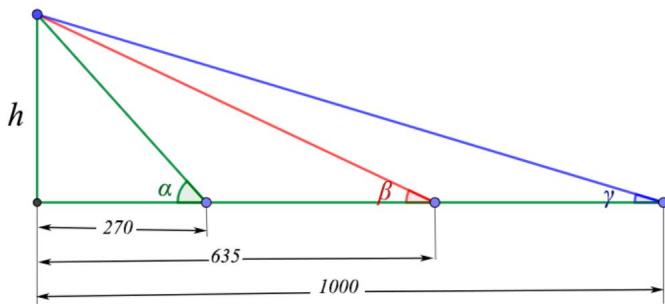
Однозначных чисел ровно 9, двузначных $99 - 9 = 90$, трёхзначных $999 - 99 - 9 = 900$, четырёхзначных 9000 и т.д. Однозначные числа займут в выписанном ряду первые 9 мест, двузначные $90 \cdot 2 = 180$ мест, трёхзначные $900 \cdot 3 = 2700$ мест. Поэтому интересующая нас цифра принадлежит трехзначному числу. Цифры, принадлежащие не более чем двузначным числам, имеют номера от 1 до $9 + 180 = 189$. Разность $2018 - 189 = 1829$ нужно разделить на 3 с остатком: $1828 = 3 \cdot 609 + 2$.

Итак, выписаны 609 трехзначных чисел. Кроме них имеются 99 одно и двузначных чисел. Таким образом, нас интересует вторая цифра числа 709, то есть ответ 0.

10. Из трех точек, которые находятся на расстояниях 1 км, 635 м и 270 м от основания телевизионной вышки, ее видно под углами, сумма которых равна 90° . Найдите высоту вышки.

Варианты ответов (м):

(a) 150; (b) 200; (c) 250; (d) 300; (e) 350; (f) 400; (g) 450

Решение

Из определения функции тангенс и чертежа, получаем:
 $h = 270 \operatorname{tg} \alpha = 635 \operatorname{tg} \beta = 1000 \operatorname{tg} \gamma$. Далее, пользуясь формулами

$$\operatorname{tg}(90^\circ - (\beta + \gamma)) = \operatorname{ctg}(\beta + \gamma); \quad \operatorname{ctg}(\beta + \gamma) = \frac{1 - \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \gamma}{\operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma},$$

получим $270 \cdot \frac{1 - \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \gamma}{\operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma} = 635 \operatorname{tg} \beta$. Поэтому, из равенства

$$635 \operatorname{tg} \beta = 1000 \operatorname{tg} \gamma, \text{ получается}$$

$$270 \cdot \frac{1 - \operatorname{tg} \beta \cdot 0,635 \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \beta + 0,635 \operatorname{tg} \beta} = 635 \operatorname{tg} \beta.$$

Отсюда, $270 = 1209,675(\operatorname{tg} \beta)^2 \Rightarrow \operatorname{tg} \beta = 300 / 635$. Таким образом, $h = 300$ м.

11. На складе совершено крупное хищение. Похищенное было вывезено на автомобиле. Подозрение пало на трех рецидивистов – A , B и C . В ходе расследования было установлено следующее:

- 1) Никто, кроме A , B и C , не был замешан в хищении.
- 2) C никогда не ходит на дело без A (и, возможно, других соучастников).
- 3) B не умеет водить машину.

Что вы можете сказать о виновности A , B и C ?

Варианты ответов предложены в следующей таблице:

	Виновен	Не виновен	Нельзя определить
A			
B			
C			

Решение

Покажем прежде всего, что по крайней мере один из A , C виновен. Если B не виновен, то ясно, что виновен кто-то из A , C (или оба), так как из высказывания (1) следует, что никто, кроме A , B и C , не может быть виновен. Если B виновен, то у него должен быть соучастник (так как B не умеет водить машину). Следовательно, и в этом случае A или C должен быть виновен. Таким образом, кто-то из A и C (или оба) виновен. Если C не виновен, то A должен быть виновен. С другой стороны, если C виновен, то в силу высказывания (2) A также виновен. Следовательно, A виновен.

	Виновен	Не виновен	Нельзя определить
A	X		
B			X
C			X

12. В преступлении подозреваются A , B и C . Установлено следующее:

- 1) Никто, кроме A , B и C , не замешан в преступлении.
- 2) A никогда не идет на дело по крайней мере без одного соучастника.
- 3) C невиновен.

Что вы можете сказать о виновности A и B ?

Варианты ответов предложены в следующей таблице:

	Виновен	Не виновен	Нельзя определить
A			
B			

Решение

Этот случай еще проще. Если A не виновен, то (так как C не виновен) виновным должен быть B - в силу высказывания (1). Если A виновен, то в силу высказывания (2) у него должен быть соучастник. Из высказывания (3) следует, что этим соучастником не мог быть C . Значит, им должен быть B . Итак, и в том и в другом случае B виновен.

	Виновен	Не виновен	Нельзя определить
A			X
B	X		

13. Совершенно ограбление. Подозреваются три рецидивиста – A , B и C . A и C – близнецы и похожи друг на друга настолько, что мало кто умеет отличить одного от другого. Полиции известно, что A и C очень робкие и не ходят на дело без соучастника. B отличается большой дерзостью и терпеть не может ходить на дело с соучастниками. Кроме того, достоверно известно, что одного из близнецов видели в совершенно другом месте во время ограбления. Также точно известно, что никто, кроме A , B и C , не замешан в ограблении. Что вы можете сказать о виновности A , B и C ?

Варианты ответов предложены в следующей таблице:

	Виновен	Не виновен	Нельзя определить
A			
B			
C			

Решение

Предположим, что B не виновен. Тогда должен быть виновен один из двух близнецов. У этого близнеца должен быть

соучастник, а поскольку B не мог быть сообщником, то им должен быть другой близнец. Но это невозможно, так как одного из близнецов во время преступления видели в совершенно другом месте во время ограбления.

Следовательно, B виновен. А поскольку B всегда "ходит на дело" в одиночку, то оба близнеца не виновны.

	Виновен	Не виновен	Нельзя определить
A		X	
B	X		
C		X	

14. Какие выводы вы можете сделать из следующих фактов о другом преступлении:

- 1) Если A виновен и B не виновен, то C виновен.
- 2) C никогда не действует в одиночку.
- 3) A никогда не ходит на дело вместе с C .
- 4) Никто, кроме A , B и C , в преступлении не замешан, и, по крайней мере, один из этой тройки виновен.

Варианты ответов предложены в следующей таблице:

	Виновен	Не виновен	Нельзя определить
A			
B			
C			

Решение

Не вызывает ни малейших сомнений виновность B . Доказать это можно при помощи любого из следующих рассуждений.

Рассуждение первое. Предположим, что B не виновен. Тогда если бы A был виновен, то C также был бы виновен в силу

высказывания (1). Это означало бы, что вопреки высказыванию (3) A совершил преступление вместе с C . Следовательно, A должен быть не виновен. Но тогда вопреки высказыванию (2) C единственный, кто виновен. Значит, B виновен.

Рассуждение второе. Оно прямее приводит к ответу на вопрос задачи.

а) Предположим, что A виновен. Тогда в силу высказывания (3) B и C не могут быть оба не виновны, поэтому у A должен быть соучастник. Так как C в силу высказывания (3) не мог быть соучастником A , то им должен быть B . Следовательно, если A виновен, то B также виновен.

б) Предположим, что C виновен. Тогда в силу высказывания (2) у него должен быть соучастник, которым в силу высказывания (3) не мог быть A . Следовательно, им должен быть B .

в) Если ни A , ни C не виновны, то B несомненно виновен!

	Виновен	Не виновен	Нельзя определить
A			X
B	X		
C			X

15. В ограблении подозреваются 3 человека: A , B и C . Неопровержимыми уликами доказано, что по крайней мере один из них виновен и что никто, кроме A , B и C , в преступлении не участвовал. Кроме того, удалось установить следующее:

- 1) Если A виновен, то у него был ровно один соучастник.
- 2) Если B виновен, то у него было ровно два соучастника.

Что вы можете сказать о виновности A , B и C ?

Варианты ответов предложены в следующей таблице:

	Виновен	Не виновен	Нельзя определить
A			
B			
C			

Решение

Если A виновен, то в силу высказывания (1) в преступлении замешаны ровно двое подсудимых. Если же виновен B , то в силу высказывания (2) в преступлении замешаны трое подсудимых. Поскольку и того, и другого одновременно быть не может, то по крайней мере один из A и B не виновен, поэтому виновных не может быть больше двух.

Следовательно, у B не было ровно двух соучастников, и в силу высказывания (2) подсудимый B должен быть не виновен. Если A виновен, то у него был ровно один соучастник. Им должен быть C (так как B не виновен). Если A не виновен, то A и B не виновны. Тогда C должен быть виновен. Итак, независимо от того, виновен или не виновен A , подсудимый C должен быть виновен. Следовательно, C виновен.

	Виновен	Не виновен	Нельзя определить
A			X
B		X	
C	X		



МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
ОЛИМПИАДА 2019
ПЕРВЫЙ ТУР

1. На семинаре по курсу «Линейная алгебра» число отсутствующих в группе студентов составило $\frac{1}{6}$ часть от числа присутствовавших. После того как пришел еще один опоздавший студент, число отсутствующих стало равно 12% от числа присутствующих. Сколько студентов в этой группе?

Варианты ответов:

(a) 19; (b) 25; (c) 28; (d) 8; (e) 31; (f) 35; (g) 41.

Решение

Обозначим исходное число присутствовавших через x . Тогда, имеет место уравнение

$$0,12(x+1) = \frac{1}{6}x - 1 \Leftrightarrow \frac{1}{6}x - \frac{12}{100}x = \frac{12}{100} + 1 \Leftrightarrow \frac{100 - 72}{600}x = \frac{112}{100}.$$

Решим его:

$$\frac{28}{600}x = \frac{112}{100} \Leftrightarrow x = \frac{112}{100} : \frac{28}{600} \Leftrightarrow x = \frac{112}{100} : \frac{600}{28} = 24.$$

Таким образом, на семинаре было 24 студента,

отсутствовали: $\frac{1}{6} \cdot 24 = 4$. Соответственно, в этой группе

было: $24 + 4 = 28$ студентов.

2. Найти сумму всех положительных двузначных четных чисел, делящихся на 3 нацело.

Варианты ответов:

(a) 750; (b) 762; (c) 774; (d) 786; (e) 798; (f) 810; (g) 822.

Решение

Имеется 90 двузначных чисел, $90/3 = 30$ из них делятся на 3. Из этих 30 чисел, $30/2 = 15$ четных. Причем, первое из них 12, а последнее 96. Поэтому, по формуле для суммы

членов арифметической прогрессии: $S = \frac{12 + 96}{2} \cdot 15 = 810$.

3. К 6 литрам морской воды добавили 9 литров пресной, в итоге получили 7-процентный солевой раствор. Каков был процент содержания соли в морской воде?

Варианты ответов (%):

(a) 15,5; (b) 16; (c) 16,5; (d) 17; (e) 17,5; (f) 18; (g) 18,5.

Решение

Обозначив искомый процент через p , получим уравнение

$$6 \cdot p = 0,07(6 + 9).$$

Отсюда, $p = 0,175 = 17,5\%$.

4. Малыш и Карлсон, поедая одновременно варенье из банки, могут опустошить ее за 2 минуты. Известно, что Карлсон ест варенье в два раза быстрее, чем Малыш. За какое время они съедят все варенье из банки, если сначала Малыш съест третью его часть, а потом передаст банку Карлсону?

Варианты ответов (мин):

(a) 4; (b) 4,5; (c) 5; (d) 5,5; (e) 6; (f) 6,5; (g) 7.

Решение

Обозначив все варенье через J , скорость Малыша через v , получим уравнение

$$\frac{J}{v+2v} = 2. \text{ То есть, } \frac{J}{v} = 6. \text{ Поэтому, ответ:}$$

$$\frac{J/3}{v} + \frac{2J/3}{2v} = \frac{J/3}{v} + \frac{J/3}{v} = \frac{2}{3} \cdot \frac{J}{v} = \frac{2}{3} \cdot 6 = 4.$$

5. Найти сумму всех целых положительных корней уравнения

$$13x+14y+15z=121$$

Варианты ответов: (a) 5; (b) 6; (c) 7; (d) 8; (e) 9; f) 10; (g) 11.

Решение

Попробуем подобрать решение. Понятно, что $14y$ всегда будет четным. Поэтому, x и z должны иметь противоположную четность.

Начнем с $x = 1$ и $z = 2$. Тогда, $14y = 121 - 13 - 30 = 78$.

Корень этого уравнения нецелый.

Далее, $x = 1$ и $z = 4$. Тогда, $14y = 121 - 13 - 60 = 48$.

Корень этого уравнения нецелый.

Далее, $x = 1$ и $z = 6$. Тогда, $14y = 121 - 13 - 90 = 18$.

Корень этого уравнения нецелый.

Далее, $x = 2$ и $z = 1$. Тогда, $14y = 121 - 26 - 15 = 80$.

Корень этого уравнения нецелый.

Далее, $x = 2$ и $z = 3$. Тогда, $14y = 121 - 26 - 45 = 50$.

Корень этого уравнения нецелый.

Далее, $x = 2$ и $z = 5$. Тогда, $14y = 121 - 26 - 75 = 20$.

Корень этого уравнения нецелый.

Далее, $x = 3$ и $z = 2$. Тогда, $14y = 121 - 39 - 30 = 52$.

Корень этого уравнения нецелый.

Далее, $x = 3$ и $z = 4$. Тогда, $14y = 121 - 39 - 60 = 22$.

Корень этого уравнения нецелый.

Далее, $x = 4$ и $z = 1$. Тогда, $14y = 121 - 52 - 15 = 54$.

Корень этого уравнения нецелый.

Далее, $x = 4$ и $z = 3$. Тогда, $14y = 121 - 52 - 45 = 24$.

Корень этого уравнения нецелый.

Далее, $x = 5$ и $z = 2$. Тогда, $14y = 121 - 65 - 30 = 26$.

Корень этого уравнения нецелый.

Далее, $x = 6$ и $z = 1$. Тогда, $14y = 121 - 78 - 15 = 28$.

Корень этого уравнения $y = 2$.

Сделав еще несколько шагов, можем убедиться, что других решений нет.

Поэтому, ответ: $6 + 2 + 1 = 9$.

6. Площадь прямоугольного треугольника равна 30 см^2 .

Определите периметр этого треугольника, зная, что длины его сторон являются целыми числами.

Варианты ответов (см):

(a) 12; (b) 16; (c) 20; (d) 24; (e) 28; (f) 30; (g) 32.

Решение

Так как площадь прямоугольного треугольника равна половине произведения катетов, получаем, что $ab = 60$, где a и b — длины катетов. Итак, нам необходимо найти два натуральных числа, таких, что их произведение равно 60, а сумма квадратов, по теореме Пифагора, является квадратом целого числа.

$1^2 + 60^2 = 3601$ — не квадрат целого числа;

$2^2 + 30^2 = 904$ — не квадрат целого числа;

$3^2 + 20^2 = 409$ — не квадрат целого числа;

$4^2 + 15^2 = 3601$ — не квадрат целого числа;

$5^2 + 12^2 = 169 = 13^2$.

Поэтому, ответ: $5 + 12 + 13 = 30$.

7. Из A в B в первой половине дня выехал велосипедист, в это же время, из B в A вышел пешеход. Они встретились в полдень, но не остановились, а продолжили свой путь, не меняя скорости. Велосипедист приехал в B в час дня, а пешеход пришел в A в 9 часов вечера. В котором часу из A выехал велосипедист?

Варианты ответов (час):

(a) 4; (b) 5; (c) 6; (d) 7; (e) 8; (f) 9; (g) 10.

Решение Это хорошо известная задача и может быть решена многими способами. (Можно погуглить.) В частности, два способа решения приведены к задаче 1го тура олимпиады 2012 года. Предлагаем еще один способ.

Условно, можно рассмотреть «работу», которую выполняют велосипедист и пешеход. Вместе они ее выполнят за $(12 - x)$ часов, один велосипедист — за $(13 - x)$ часов, один пешеход — за $(21 - x)$ часов. Тогда, за $(13 - x)(21 - x)$ часов велосипедист может выполнить ее $(21 - x)$ раз, пешеход может выполнить ее $(13 - x)$ раз. Таким образом, за $(13 - x)(21 - x)$ часов велосипедист и пешеход вместе могут выполнить ее $(21 - x) + (13 - x)$ раз. Тогда,

$$\frac{(13-x)(21-x)}{(13-x)+(21-x)} = (12-x).$$

Раскроем скобки, приведем подобные члены и получим квадратное уравнение $x^2 - 24x + 135 = 0$, которое имеет два корня 15 и 9. Так как велосипедист выехал в первой половине дня, ответ: 9 часов.

8. Функция $f(x)$ удовлетворяет соотношению

$2f(x) + f(x^2 - 2) = 2019$ при всех действительных значениях x . Найти величину $f(\sqrt{3})$

Варианты ответов:

(a) 668; (b) 673; (c) 678; (d) 683; (e) 688; (f) 693; (g) 698.

Решение

Подставив вместо x противоположное значение $-x$, получим $2f(-x) + f((-x)^2 - 2) = 2019$. Поэтому, в результате вычитания, из системы

$$\begin{cases} 2f(x) + f(x^2 - 2) = 2019, \\ 2f(-x) + f(x^2 - 2) = 2019 \end{cases} \text{ получим, что функция является}$$

четной: $f(x) = f(-x)$.

Далее, подставляя в исходное уравнение $x = 1$, получим:

$$2f(1) + f(1^2 - 2) = 2019 \Leftrightarrow 3f(1) = 2019 \Leftrightarrow f(1) = 673$$

Осталось подставить $x = \sqrt{3}$ в исходное уравнение:

$$2f(\sqrt{3}) + f(3 - 2) = 2019 \Rightarrow 2f(\sqrt{3}) + 673 = 2019 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2f(3) = 1346 \Rightarrow f(\sqrt{3}) = 673.$$

9. Сколькими способами можно рассадить в один ряд 4-х юношей и 4-х девушек, если девушки могут сидеть друг с другом, а юноши нет?

Варианты ответов:

(a) 24; (b) 120; (c) 240; (d) 360; (e) 720; (f) 1440; (g) 2880.

Решение

Существуют четыре варианта рассадки: ДЮДЮДЮДЮ; ЮДЮДЮДЮД; ЮДДЮДЮДЮ; ЮДЮДДЮДЮ; ЮДЮДЮДДЮ. В каждом из этих вариантов и девушки и парни могут меняться между собой местами. Таким образом, в каждом варианте: $4! \cdot 4! = 24 \cdot 24 = 576$ способов.

Ответ: $576 \cdot 5 = 2880$.

10. Сколько решений имеет уравнение

$$150 \cdot \sin x = x ?$$

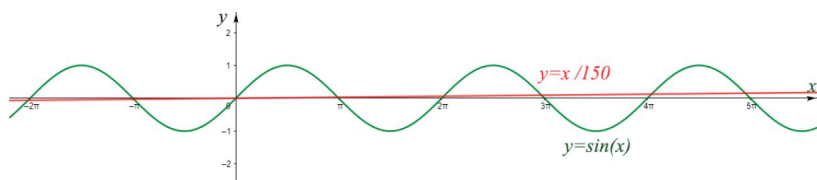
Варианты ответов:

(a) 46; (b) 48; (c) 53; (d) 91; (e) 95; (f) 96; (g) 101.

Решение

Задачу легко решить на графике. Поскольку графики синуса и функции $y = x/150$ симметричны относительно начала координат, то достаточно рассмотреть правую часть графиков. Максимальное значение синуса равно 1. Поэтому точки пересечения графиков будут находиться в пределах тех значений x , для которых $x/150$ не превосходит 1, т. е. в пределах от 0 до 150. В этом промежутке содержится $150/2\pi$ периодов $\sin x$, примерно $150/2\pi \approx 23,9$. В каждом периоде для $\sin x$ синусоида и график прямой $y = 150/x$ имеют две

точки пересечения, причём в первой половине периода (рис.). Поэтому в пределах 23,9 периодов будет содержаться 48 точек пересечения графиков. Столько же точек пересечения графиков будет находиться слева от начала координат, но при этом необходимо учесть, что начало координат считается нами два раза. Поэтому всего данное уравнение имеет 95 корней.



В некотором государстве король подвергает своих узников следующему изощренному испытанию: узник должен выбрать одну из двух комнат, в каждой из которых находится либо принцесса, либо тигр. Если узник выбрал комнату с принцессой, то он свободен и может покинуть тюрьму с прекрасной невестой, если в выбранной комнате был тигр, то узник погибает. У короля очень переменчивое настроение, поэтому возможно, что в обеих комнатах будут принцессы, или в обеих комнатах будут тигры. На дверях комнат написаны важные для правильного выбора сообщения, кроме того, узнику может быть сообщена дополнительная достоверная информация. Помогите узникам освободиться от сумасбродного тирана!

11.

Сообщение на двери первой комнаты	Сообщение на двери второй комнаты
В этой комнате находится принцесса, а в другой комнате сидит тигр.	В одной из этих комнат находится принцесса; кроме того, в одной из этих комнат сидит тигр.

Кроме того, узнику известно, что одно из сообщений на дверях – правда, а другое сообщение – ложь.

С какой ситуацией имеет дело узник?

Варианты ответов:

- (a) 1 комната - тигр, 2 комната – тигр;
- (b) 1 комната - тигр, 2 комната - принцесса;
- (c) 1 комната – принцесса, 2 комната – тигр;
- (d) 1 комната – принцесса, 2 комната – принцесса.

Решение

Нам известно, что надпись на одной из дверей истинна, а на другой ложна. Возможно ли, чтобы утверждение, написанное на первой двери, было истинным, а на второй — ложным?

Конечно же, нет! Поскольку если надпись на первой двери говорит нам правду, то тогда надпись на второй двери также должна быть неверной, то есть если принцесса находится в комнате 1, а тигр сидит в комнате 2, то это заведомо означает что в одной из комнат находится принцесса, а в другой тигр.

Но поскольку не может оказаться так, чтобы первое утверждение было истинным, а второе ложным, то ясно, что истинной должна быть вторая надпись, а ложной — первая.

Далее, поскольку второе утверждение является истинным, то это означает, что в одной из комнат действительно находится принцесса, а в другой сидит тигр. Теперь, поскольку первая надпись лжет, значит, тигр должен сидеть в комнате 1, а

принцесса в комнате 2. Следовательно, узник должен выбрать вторую комнату.

12.

Сообщение на двери первой комнаты	Сообщение на двери второй комнаты
По крайней мере, в одной из этих комнат находится принцесса.	Тигр сидит в другой комнате.

Кроме того, узнику известно, что оба сообщения на дверях либо одновременно истинны, либо одновременно ложны. С какой ситуацией имеет дело узник?

Варианты ответов:

- (a) 1 комната - тигр, 2 комната – тигр;
- (b) 1 комната - тигр, 2 комната - принцесса;
- (c) 1 комната – принцесса, 2 комната – тигр;
- (d) 1 комната – принцесса, 2 комната – принцесса.

Решение

Если надпись на двери комнаты 2 ложна, то принцесса находится в комнате 1. Значит, принцесса присутствует хоть в одной из комнат, так что утверждение на двери комнаты 1 истинно. Поэтому невозможно, чтобы сразу две надписи оказались ложными. Это означает, что оба приведенных утверждения истинны (ведь, согласно условию, они одновременно либо оба истинны, либо оба ложны). Таким образом, тигр сидит в комнате 1, а принцесса в комнате 2; значит, узнику опять следует выбрать вторую комнату.

13.

Сообщение на двери первой комнаты	Сообщение на двери второй комнаты
Верно, по крайней мере, одно из высказываний: «в этой комнате сидит тигр», «принцесса находится в другой комнате».	Принцесса находится в другой комнате.

Кроме того, узнику известно, что оба сообщения на дверях либо одновременно истинны, либо одновременно ложны. С какой ситуацией имеет дело узник?

Варианты ответов:

- (a) 1 комната - тигр, 2 комната – тигр;
- (b) 1 комната - тигр, 2 комната - принцесса;
- (c) 1 комната – принцесса, 2 комната – тигр;
- (d) 1 комната – принцесса, 2 комната – принцесса.

После трех испытаний король решил усложнить задачу, стоящую перед узниками. В следующих задачах сообщение на первой двери истинно, если там находится принцесса и ложно, если там находится тигр, а сообщение на второй двери истинно, если там находится тигр и ложно, если там находится принцесса.

Решение

В тот раз король, по всей видимости, пребывал в благодушном настроении, поскольку в обеих комнатах оказалось по принцессе. Убедимся в этом следующим образом.

Надпись на двери комнаты 1 означает что, хотя бы одно из двух утверждений верно: в комнате 1 сидит тигр; в комнате 2 находится принцесса. (При этом не исключены, что обе

возможности осуществляются одновременно.) Далее, если утверждение на двери комнаты 2 ложно, то, значит, тигр сидит в комнате 1, а тогда надпись на двери комнаты 1 говорит правду (поскольку выполняется первое из приведенных на ней утверждений). Однако из условий задачи мы знаем, что не может случиться так, чтобы надпись на одной из дверей оказалась истинной, а на другой ложной. Следовательно, поскольку утверждение 2 истинно, то надписи на обеих дверях одновременно должны быть истинными. Теперь, поскольку на двери комнаты 2 написано истинное утверждение, то в комнате 1 находится принцесса. Это означает также, что первый из вариантов на двери комнаты 1 невозможен, но поскольку, по меньшей мере, один из этих вариантов обязательно выполняется, то это должен быть именно второй вариант. Таким образом, в комнате 2 также находится, принцесса.

14.

Сообщение на двери первой комнаты	Сообщение на двери второй комнаты
В обеих комнатах находятся принцессы.	В обеих комнатах находятся принцессы.

С какой ситуацией имеет дело узник?

Варианты ответов:

- (a) 1 комната - тигр, 2 комната – тигр;
- (b) 1 комната - тигр, 2 комната - принцесса;
- (c) 1 комната – принцесса, 2 комната – тигр;
- (d) 1 комната – принцесса, 2 комната – принцесса.

Решение

Поскольку сообщения на обеих дверях утверждают одно и то же, значит, они одновременно либо говорят правду, либо лгут. Допустим, что обе надписи утверждают правду — тогда в обеих комнатах должны находиться принцессы. В частности, это будет означать, что и в комнате 2 принцесса. Но нам сообщили, что если в комнате 2 находится принцесса, то утверждение на соответствующей табличке должно быть ложным. В результате мы приходим к противоречию, и, следовательно, надписи на дверях обеих комнат не могут являться истинными; они будут ложными. Итак, мы получаем, что в комнате 1 сидит тигр, а в комнате 2 находится принцесса.

15.

Сообщение на двери первой комнаты	Сообщение на двери второй комнаты
По крайней мере, в одной из комнат находится принцесса.	Принцесса - в другой комнате.

С какой ситуацией имеет дело узник?

Варианты ответов:

- (a) 1 комната - тигр, 2 комната – тигр;
- (b) 1 комната - тигр, 2 комната - принцесса;
- (c) 1 комната – принцесса, 2 комната – тигр;
- (d) 1 комната – принцесса, 2 комната – принцесса.

Решение

Если предположить, что в первой комнате сидит тигр, то мы приходим к противоречию. Действительно, в этом случае

утверждение на двери первой комнаты оказывается ложным, что сразу приводит нас к выводу, что ни в одной из комнат нет принцессы, то есть что в обеих комнатах должно сидеть по тигру. В то же время из условия задачи мы знаем — наличие тигра во второй комнате означает, что вторая надпись является верной, то есть в другой комнате должна находиться принцесса. Это противоречит исходному предположению о том, что в первой комнате сидит тигр. Значит, тигр в первой комнате оказаться не может, и, следовательно, там должна находиться принцесса. Таким образом, вторая надпись не лжет — во второй комнате действительно находится тигр. Итак, принцесса находится в первой комнате, а тигр сидит во второй.

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ВТОРОГО ТУРА

ВТОРОЙ ТУР

1. (1 балл) Из A в B и из B в A одновременно (на рассвете) вышли навстречу друг другу две старушки. Они встретились в полдень, но не остановились, а продолжили свой путь, не меняя скорости. Первая пришла в B в 4 часа дня, а вторая пришла в A в 9 часов вечера. В каком часу был в этот день рассвет?

Решение Это хорошо известная задача и может быть решена многими способами. Предлагаем два способа решения.

Первый способ

Скорости старушек v_1 и v_2 . Время в пути до встречи x .

Тогда имеют место уравнения: $xv_1 = 9v_2$; $xv_2 = 4v_1$. Выразив

x из этих уравнений, получим: $x = 9 \frac{v_2}{v_1} = 4 \frac{v_1}{v_2}$. Поэтому,

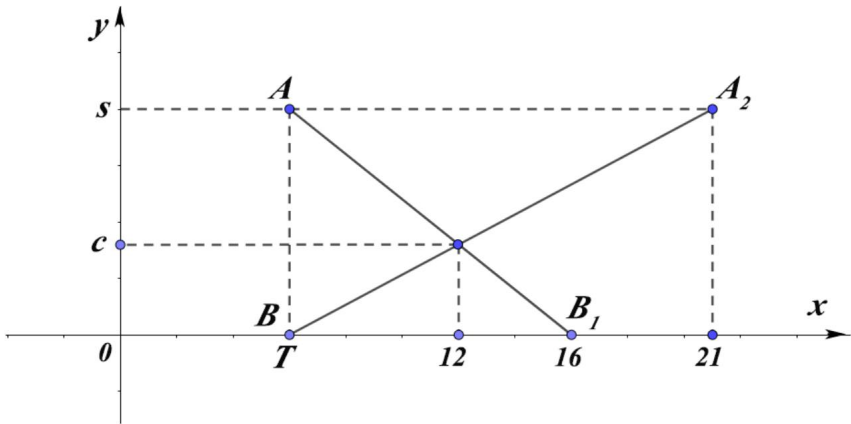
$$\frac{v_1}{v_2} = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2}. \text{ Отсюда, } x = 6.$$

Таким образом, выяснилось, что рассвет наступил в: $12 - 6 = 6$ часов утра.

Второй способ

Так как по условию задачи старушки не меняли скорости, эту задачу можно решить, используя уравнение прямой $y = kx + b$, где в данном случае y — расстояние, x — время.

Полезно нарисовать чертеж.



Итак, согласно нашему чертежу, первая старушка выходит из точки с координатами $(T; s)$, и прибывает в точку с координатами $(16; 0)$. Вторая старушка выходит из точки с координатами $(T; 0)$, и прибывает в точку с координатами $(21; s)$. При этом, через T обозначено искомое время; через s — расстояние между A и B ; 16 — это 4 часа дня; 21 — 9 часов вечера.

Тогда, коэффициенты уравнения прямой $y = k_1x + b_1$, на которой расположены точки A и B_1 можно найти, используя

координаты этих точек:
$$\begin{cases} s = k_1T + b_1; \\ 0 = k_116 + b_1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k_1 = \frac{s}{T - 16}; \\ b_1 = -\frac{16s}{T - 16}. \end{cases}$$

Следовательно, первая старушка двигалась по прямой

$$y = \frac{s}{T - 16}x - \frac{16s}{T - 16}.$$

Точно также можно получить уравнение прямой, по которой двигалась вторая старушка — уравнения прямой $y = k_2x + b_2$, на которой расположены точки A_2 и B :

$$\begin{cases} 0 = k_2T + b_2; \\ s = k_221 + b_2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k_2 = \frac{s}{21 - T}; \\ b_1 = -\frac{Ts}{21 - T}. \end{cases}$$

Момент встречи старушек определяет координаты точки пересечения прямых — точку $(12; c)$. Поэтому нужно решить систему:

$$\begin{cases} c = \frac{s}{T - 16} \cdot 12 - \frac{16s}{T - 16}; \\ c = \frac{s}{21 - T} \cdot 12 - \frac{Ts}{21 - T}. \end{cases}$$

Для этого, вычтем из первого уравнения второе:

$$-\frac{4s}{T - 16} = \frac{12s}{21 - T} - \frac{Ts}{21 - T}, \text{ разделим на } s \text{ и приведем к общему}$$

знаменателю: $-4(21 - T) = (12 - T)(T - 16)$. Раскроем скобки, приведем подобные члены и получим квадратное уравнение:

$T^2 - 24T + 108 = 0$, которое имеет корни 6 и 18. Понятно, что условию задачи — старушки вышли на рассвете удовлетворяет первый корень. Итак, ответ: в 6 часов утра.

Конечно, в данном случае, второй способ оказался более длинным, но он хорош тем, что его можно использовать для решения очень широкого круга задач.

Ответ: в 6 часов утра

2. (1 балл) Имеются два одинаковых ящика кубической формы заполненные шарами, сделанными из одного и того же материала. В обоих ящиках шары уложены вплотную доверху так, что в каждом слое находится по одинаковому их числу и крайние шары каждого слоя касаются стенок ящика. Если ящик закрыть, то крышка также будет касаться шаров верхнего слоя. В первом ящике шары большие, а во втором меньшего диаметра. Какой из ящиков тяжелее?

Решение

Нужно рассмотреть кубики, на которые делится большой куб, такие, что каждый содержит шар, касающийся всех его стенок. Шар будет занимать $n\%$ объёма кубика. Значит, и все шары занимают $n\%$ большого куба вне зависимости от объёма шара.

Ответ: вес будет одинаков.

3. (1 балл) На аэродром к прибытию самолета была выслана машина из почтового отделения. Самолет прибыл раньше установленного срока, и привезенная почта была направлена в почтовое отделение с мотоциклистом. Проехав полчаса, мотоциклист встретил машину, на которую была переложена почта, и машина, не задерживаясь, повернула обратно. В почтовое отделение машина прибыла на 20 мин. раньше, чем следовало. На сколько минут раньше установленного срока самолет прибыл на аэродром?

Решение

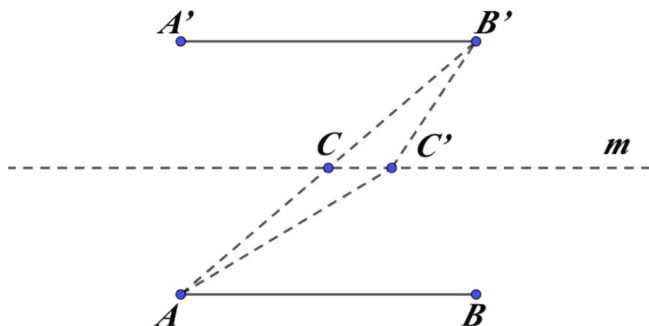
Машина находилась в пути на 20 минут меньше, чем ей обычно требовалось для того, чтобы преодолеть путь до аэродрома и обратно. Экономия во времени произошла за счет того, что в этот раз не пришлось доезжать до аэродрома. Эти 20 минут машина затратила бы от места встречи с мотоциклистом до аэродрома и обратно. Следовательно, чтобы проехать этот путь в один конец, например, от места встречи до аэродрома, машине потребовалось бы 10 минут. Но мы знаем, что машина встретила мотоциклиста после того, как тот пробыл в пути 30 минут, то есть спустя полчаса по прибытии самолета. А так как машина выехала вовремя, то, следовательно, прибавив к этим 30 минутам те 10 минут, которые необходимы машине, чтобы добраться до аэропорта, мы устанавливаем, что самолет прибыл на аэродром на 40 минут раньше установленного срока.

Ответ: на 40 минут раньше установленного срока.

4. (1 балл) Доказать, что среди всех треугольников с одинаковыми основанием и высотой, опущенной на это основание, наименьший периметр имеет равнобедренный треугольник.

Решение

Будем считать, что высота опущена на основание AB треугольника ABC . Тогда можно считать, что вершина C расположена на фиксированной прямой m , параллельной AB .



Но тогда сумма $AC + CB$ наименьшая, когда C – точка пересечения m и прямой AB' , где B' – точка, симметричная B относительно m . Для того чтобы убедиться, достаточно рассмотреть любую другую точку C_1 на прямой m . Это и значит, что треугольник ABC – равнобедренный.

5. (3 балла) В математической олимпиаде приняли участие 21 мальчик и 21 девочка. Известно, что: а) каждый из них решил не более шести задач; б) для каждого мальчика и каждой девочки найдется, по крайней мере, одна задача, которая была решена ими обоими. Докажите, что найдется задача, которую решили хотя бы 3 мальчика и 3 девочки.

Решение:

Предположим, что нашлась задача, которую решили не более двух девочек или не более двух мальчиков. Будем считать задачу «красной», если её решили не более двух девочек и «чёрной» в противоположном случае (тогда её решили не более двух мальчиков).

Представим шахматную доску с 21-й строкой, каждая из которых соответствует девочке, и 21-м столбцом, каждый из которых соответствует мальчику. Тогда каждая клетка соответствует паре «мальчик–девочка». Каждую клетку покрасим в цвет какой-нибудь задачи, которую решили и мальчик-строка и девочка-столбец. По принципу Дирихле в каком-нибудь столбце найдётся 11 чёрных клеток, или в какой-нибудь строке найдутся 11 красных клеток (потому что иначе получится, что всего клеток не более чем $21 \cdot 10 + 21 \cdot 10 < 21^2$).

Рассмотрим, например, девочку-строку, содержащую хотя бы 11 чёрных клеток. Каждой из этих клеток соответствует задача, решённая максимум двумя мальчиками. Тогда мы можем указать не менее 6 различных задач, решённых этой девочкой. В силу первого условия никаких других задач девочка не решала, но тогда максимум 12 мальчиков имеют общие решённые задачи с этой девочкой, что противоречит второму условию.

Точно также разбирается случай, если в каком-нибудь столбце найдутся 11 красных клеток.

6. (2 балла) Сколькими способами семь яблок можно раздать трем девочкам - Айпери, Жибек и Валерии, чтобы Жибек получила не меньше четырех яблок, а Валерия – не больше двух?

Решение

Нужно сразу договориться о том, что возможны способы, при которых Айпери или Валерия не получают ничего. Далее, ответ можно получить простым перебором возможных ситуаций, указав тройки чисел, в которых первое число — это

количество яблок, полученное Жибек, второе — Валерией, третье — Айпери:

$(4; 0; 3)$, $(4; 1; 2)$, $(4; 2; 1)$,

$(5; 0; 2)$, $(5; 1; 1)$, $(5; 2; 0)$,

$(6; 0; 1)$, $(6; 1; 0)$,

$(7; 0; 0)$.

Следовательно, ответ: $3 + 3 + 2 + 1 = 9$ способов.

Также, перебором можно получить ответ, предположив, что каждая девочка должна получить хоть одно яблоко.

Ответ: 9 способов.

7. (5 баллов) В начале трассы находится заправочная станция с запасом горючего на 2 500 км пути джипа. Бензобак джипа вмещает горючего на 500 км пути. В любой точке трассы можно создавать запасы горючего, сливая его из бензобака. Джип может курсировать в любом направлении, в том числе, возвращаясь к началу пути, и к местам, где созданы запасы, для дозаправки. На какое максимальное расстояние может удалиться от заправочной станции джип, используя имеющееся горючее, при условии, что а) можно создать только один пункт дозаправки; б) можно создать два различных пункта дозаправки. Описать траекторию пути джипа.

Решение

Поразмыслив, можно понять, что максимальное удаление может быть достигнуто, если с последнего пункта дозаправки джип выедет с полным бензобаком. Это будет возможно, если на этом пункте будет столько бензина, сколько будет истрачено для того, чтобы добраться до него с момента предыдущей полной заправки. Предположим что это

количество бензина необходимое для преодоления x км дороги.

а) Полный бак можно заправить 5 раз. Поэтому, четыре поездки нужно совершить до пункта дозаправки, до которого x км, и обратно, с тем чтобы завести туда бензин на x км дороги. Отсюда, получаем уравнение: $(500 - 2x)4 = x$. Следовательно, пункт дозаправки нужно устроить на расстоянии: $2000/9 = 222,(2)$ км. Вернувшись в четвертый раз в джип заливают последний бензин. Его хватит на 500 км. Доезжают до пункта дозаправки и дополняют бак до полного. После этого можно проехать еще 500 км. Итак, в данном случае можно удалиться от заправочной станции на: $222,(2) + 500 = 722,(2)$ км.

б) Понятно, что достижения максимума после каждой заправки нужно уезжать с полным баком. Поэтому, на первую станцию дозаправки нужно перебросить бензин необходимый для: 1) y ; 2) $500 + y$; 3) $500 \cdot 2 + y$; 4) $500 \cdot 3 + y$ км пути. В данном случае, джип совершает 4 поездки туда и обратно на расстояние y км, в пятый раз доезжает до первой станции дозаправки, дополняет бак до полного и едет дальше.

1) В данном случае, второй пункт дозаправки не используется и ранее было показано, что в данном случае можно удалиться от заправочной станции на $722,(2)$ км.

2) Получаем уравнение: $(500 - 2y)4 = 500 + y$. Тогда, $y = 1500/9 = 166,(6)$ км. В этом случае, на второй пункт дозаправки, расположенный на расстоянии z км, один раз будет заброшен бензин, необходимый для преодоления z км и, выехав с первого пункт дозаправки с полным баком, джип дополнит на втором пункте бак до полного и проедет еще 500

км. Следовательно, $500 - 2z = z$ и, отсюда, $z = 500/3 = 166,(\underline{6})$ км. В итоге, джип может удалиться на $y + z + 500 = 166,(\underline{6}) + 166,(\underline{6}) + 500 = 833,(\underline{3})$ км.

3) Получаем уравнение: $(500 - 2y)4 = 500 \cdot 2 + y$. Тогда, $y = 1000/9 = 111,(\underline{1})$ км. В этом случае, на второй пункт дозаправки, расположенный на расстоянии z км, в два приема будет заброшен бензин, необходимый для преодоления z км и, выехав с первого пункта дозаправки с полным баком, джип дополнит на втором пункте бак до полного и проедет еще 500 км. Следовательно, $(500 - 2z)2 = z$ и, отсюда, $z = 1000/5 = 200$ км. В итоге, джип может удалиться на $y + z + 500 = 111,(\underline{1}) + 200 + 500 = 811,(\underline{1})$ км.

4) Получаем уравнение: $(500 - 2y)4 = 500 \cdot 3 + y$. Тогда, $y = 500/9 = 55,(\underline{5})$ км. В этом случае, на второй пункт дозаправки, расположенный на расстоянии z км, в три приема будет заброшен бензин, необходимый для преодоления z км и, выехав в четвертый раз с первого пункта дозаправки с полным баком, джип дополнит на втором пункте бак до полного и проедет еще 500 км. Следовательно, $(500 - 2z)3 = z$ и, отсюда, $z = 1500/7 \approx 214,3$ км. В итоге, джип может удалиться на $y + z + 500 = 55,(\underline{5}) + 214,3 + 500 = 769,84$ км.

Таким образом, получилось, что максимальное расстояние, на которое джип может удалиться от заправочной станции при двух станциях дозаправки равно $833,(\underline{3})$ км.

Ответ: а) $722,(\underline{2})$ км; б) $833,(\underline{3})$ км.

Предположим, что, решая задачи 8-10, вы находитесь в лесу, каждый обитатель которого либо рыцарь, либо лжец. Напомним, что рыцари всегда говорят правду, а лжецы всегда

лгут. Кроме того, в лесу водятся оборотни, имеющие на редкость неприятную привычку иногда превращаться в волков и пожирать людей. Оборотень может быть либо рыцарем, либо лжецом.

8. (2 балла) Вы берете интервью у трех обитателей леса A , B , C . Известно, что ровно один из них оборотень. В беседе с вами A заявляет: « C – оборотень», B говорит: «Я не оборотень», и C добавляет: «По крайней мере, двое из нас лжецы». Наша задача состоит из двух частей. а) Кем является оборотень, присутствующий в этой компании: рыцарем или лжецом? б) Если бы вам предстояло выбрать одного из трех обитателей леса в попутчики и вопрос о том, не окажется ли ваш избранник оборотнем, волновал бы вас сильнее, чем вопрос, не окажется ли он лжецом, то на ком из трех вы бы остановили свой выбор?

Решение

C - либо рыцарь, либо лжец. Предположим, что C - рыцарь. Тогда по крайней мере двое из трех обитателей леса - лжецы. Следовательно, ими должны быть A и B . Отсюда мы заключаем, что B - оборотень (так как, по его словам, он не оборотень, а по доказанному B - лжец). Итак, если C - рыцарь, то оборотень - лжец (так как им должен быть B). Предположим теперь, что C - лжец. Тогда неверно, что по крайней мере два из трех обитателей леса - лжецы, поэтому среди них есть самое большее один лжец. Этим лжецом должен быть C . Следовательно, и A , и B - рыцари. Так как A рыцарь и утверждает, что C - оборотень, то C действительно оборотень. Таким образом, и в этом случае оборотень - лжец (а именно C).

Следовательно, независимо от того, рыцарь ли C или лжец, оборотень лжец (хотя в каждом случае речь идет о другом лице). Итак, ответ на первый вопрос гласит: оборотень - лжец. Кроме того, мы доказали, что оборотнем может быть либо B , либо C . Следовательно, если вы хотите выбрать себе попугайчика, который заведомо не был бы оборотнем, то вам следует остановить свой выбор на A .

Ответ: а) оборотень - лжец (а именно C);

б) следует остановить свой выбор на A .

9. (2 балла) Вы снова берете интервью у трех обитателей леса A , B и C . Известно, что каждый из них либо рыцарь, либо лжец и среди них имеется ровно один оборотень. В беседе с вами A заявляет: «Я оборотень», B также говорит: «Я оборотень», а C добавляет: «Не более чем один из нас рыцарь». Проведите полную классификацию персонажей A , B и C .

Решение

Докажем сначала, что C - рыцарь. Предположим, что C был бы лжецом. Тогда его первое высказывание было бы ложным, поэтому по крайней мере двое из трех обитателей леса были бы рыцарями. Это означало бы, что A и B оба должны быть рыцарями (так как по предположению C - лжец). Следовательно, их высказывания были бы истинными, и они оба вопреки условиям задачи были бы оборотнями. Итак, C - рыцарь. Тогда ровно двое из трех лжецы. Ими должны быть A и B . А поскольку их высказывания ложны, то ни A , ни B не оборотни. Следовательно, оборотнем должен быть C . Таким образом, C - рыцарь и оборотень, A и B - лжецы, и ни один из них не оборотень.

Ответ: C - рыцарь и оборотень, A и B - лжецы, и ни один из них не оборотень.

10. (2 балла) Мы снова встречаем трех обитателей леса A , B , C , каждый из которых либо рыцарь, либо лжец. Заявления делают только двое из них: A и B . В их высказываниях слово "нас" относится ко всем трем героям (к A , B и C), а не только к A и B . A заявил: «По крайней мере, один из нас рыцарь», B заявил: «По крайней мере, один из нас лжец». Известно, что, по крайней мере, один из троих оборотень и ни один не является одновременно рыцарем и оборотнем. Кто оборотень?

Решение

Если бы B был лжецом, то по крайней мере один из трех обитателей леса действительно был бы лжецом. Но тогда его высказывание было бы истинным, и мы пришли бы к противоречию, так как лжецы не говорят правды. Следовательно, B - рыцарь. Тогда высказывание A истинно, и A также должен быть рыцарем. Таким образом, и A , и B - рыцари. Так как B рыцарь, то его высказывание истинно, поэтому один из трех - рыцарь. Им должен быть C . Следовательно, он и только он оборотень.

Ответ: C - оборотень.



МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
ОЛИМПИАДА 2013
ВТОРОЙ ТУР

1. (1 балл) На чудо-дереве растут бананы и ананасы. За один раз с дерева срывается 2 плода. Если сорвать 2 банана или 2 ананаса, то вырастет еще 1 ананас. А если сорвать 1 банан и 1 ананас, то вырастет 1 банан. В итоге на дереве остался один плод. Что это за плод, если вначале на этом дереве было 12 бананов и 11 ананасов?

Решение

Несложно показать, что после удаления 2-х плодов на дереве происходит следующее: число бананов либо остается неизменным, либо уменьшается на 2; число ананасов либо уменьшается на единицу, либо на единицу, соответственно, увеличивается. Таким образом, при любом варианте, число бананов всегда четно (или равно нулю). Поэтому, один банан на дереве остаться не может. Значит, остается один ананас.

Ответ: ананас.

2. (2 балла) Из ста абитуриентов на первом экзамене получили хорошие и отличные оценки 80 человек, на втором экзамене – 72, а на третьем – 60 человек. Каким может быть наименьшее число абитуриентов, получивших хорошие и отличные оценки на всех трех экзаменах?

Решение

В силу известных формул (ниже используется обозначение: $|A|$ для числа элементов во множестве A):

$$|A \cap B| = |A| + |B| - |A \cup B| \rightarrow \min = 80 + 72 - 100 = 52, (100 = \max |A \cup B|);$$

$$|A \cap C| = |A| + |C| - |A \cup C| \rightarrow \min = 80 + 60 - 100 = 40, (100 = \max |A \cup C|);$$

$$|C \cap B| = |C| + |B| - |C \cup B| \rightarrow \min = 60 + 72 - 100 = 32, (100 = \max |C \cup B|);$$

Еще одна известная формула:

$$\begin{aligned} |A \cap B \cap C| &= |A \cup B \cup C| - (|A| + |B| + |C|) + |A \cap B| + |A \cap C| + |A \cap B| = \\ &= 100 - (80 + 72 + 60) + |A \cap B| + |A \cap C| + |A \cap B| \rightarrow \min = 12. \end{aligned}$$

Ответ: 12 абитуриентов.

3. (3 балла) По двум прямолинейным шоссе к точке их пересечения с постоянными скоростями двигаются две машины. Известно, что в начальный момент времени расстояние между машинами было 20 км. Через 7 минут это расстояние составило 15 км, а еще через 4 минуты расстояние между машинами сократилось до 13 км. Через какое время (с момента начала движения) расстояние между машинами станет минимальным, и каким будет это расстояние?

Решение

В силу теоремы косинусов (см. задачу первого тура), квадрат расстояния между машинами является функцией времени t следующего вида:

$$S^2(t) = a - bt + ct^2.$$

После учета данных задачи, получаем следующую систему уравнений для определения величин a, b, c :

$$\begin{cases} a = 400, \\ a - 7b + 49c = 225, \\ a - 11b + 121c = 169. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b - 11c = 21, \\ b - 7c = 25. \end{cases}$$

Решая эту систему, находим: $a = 400, b = 32, c = 1$. Таким образом,

$$S^2(t) = 400 - 32t + t^2.$$

Минимума эта функция достигает при $t=16$ (мин), равен этот минимум 144, поэтому, минимальное расстояние между машинами равно 12 (км).

Ответ: через 16 минут расстояние будет минимальным и равным 12 км.

4* .(4балла) A cross-country racer runs a 10-mile race in 50 minutes. Prove that somewhere along the course the racer ran 2 miles in exactly 10 minutes.

Бегун пробежал 10-мильный забег по пересеченной местности за 50 минут. Докажите, что где-то по пути бегун пробежал 2 мили ровно за 10 минут.

Решение

Пусть $f(t) = s(t+10) - s(t)$, $t \in [0, 40]$ - путь, пройденный за 10 минут, начиная с момента времени « t », эта функция непрерывна. По условию задачи:

* Задача предложена преподавателями департамента математики Бард-колледжа (Нью-Йорк, США)

$$\sum_{i=0}^4 f(10i) = 10,$$

Если для любого $t \in [0, 40]$, $f(t) > 2$, то

$$10 = \sum_{i=0}^4 2 < \sum_{i=0}^4 f(10i) = 10 \text{ -противоречие.}$$

Если для любого $t \in [0, 40]$, $f(t) < 2$, то

$$10 = \sum_{i=0}^4 2 > \sum_{i=0}^4 f(10i) = 10 \text{ - снова противоречие.}$$

Поэтому, найдутся, по крайней мере, две точки (два момента времени) t_1 и t_2 , для которых: $f(t_1) < 2$ и $f(t_2) > 2$. В силу непрерывности функции $f(t)$, она «принимает все промежуточные значения», т.е. найдется точка $\bar{t} \in (t_1, t_2)$: $f(\bar{t}) = 2$.

5. (5 баллов) Два будильника показывают 12 часов дня. Первый спешит на 8 минут, второй отстает на 4 минуты в сутки. Через какое время они снова покажут одновременно 12 часов дня?

Решение:

За сутки разность показаний будильников увеличивается на 12 мин. Поэтому показания обоих будильников совпадут через $\frac{24 \cdot 60}{12} = 120$ суток, а затем будут совпадать через 240 суток,

360 суток и т.д. За $120n$ суток первый будильник уйдет вперед на $120 \cdot 8n$ минут, т.е. на $16n$ часов. Для того чтобы оба будильника показывали в этот момент правильное время, необходимо чтобы $16n$ делилось на 24. Наименьшее

подходящее для этого значение n равно 3. Таким образом через $120 \cdot 3 = 360$ суток оба будильника покажут одно и то же время, а именно 12 часов дня.

Ответ: через 360 суток.

6* (6 баллов) Let q be a positive rational number and define a sequence a_1, a_2, a_3, \dots by

$$a_1 = \sqrt{q}, a_2 = \sqrt{q + \sqrt{q}}, a_3 = \sqrt{q + \sqrt{q + \sqrt{q}}}, \dots$$

For which q does the sequence converge? Determine for which q the limit of the sequence is an integer.

Пусть q - положительное рациональное число, и определим последовательность a_1, a_2, a_3, \dots формулой

$$a_1 = \sqrt{q}, a_2 = \sqrt{q + \sqrt{q}}, a_3 = \sqrt{q + \sqrt{q + \sqrt{q}}}, \dots$$

Для какого q последовательность сходится? Определите, для какого q предел последовательности является целым числом.

Решение

Перепишем нашу последовательность в рекуррентной форме:

$$a_{n+1} = \sqrt{q + a_n}, n = 1, 2, \dots; a_1 = \sqrt{q}.$$

Или, что то же самое:

$$a_{n+1}^2 = q + a_n, n = 1, 2, \dots; a_1 = \sqrt{q}.$$

* Задача предложена преподавателями департамента математики Бард-колледжа (Нью-Йорк, США)

Предположим, что предел этой последовательности существует: $A = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$. Переходя к пределу в последнем соотношении, получим:

$$A^2 = q + A,$$

поэтому,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A = \frac{1 + \sqrt{1 + 4q}}{2}.$$

Пусть $\frac{1 + \sqrt{1 + 4q}}{2} = n$ - некоторое целое число, причем, $n \geq 2$.

Тогда, $q = n(n-1)$ - произведение двух последовательных целых чисел – это ответ на второй вопрос.

Осталось выяснить, при каких q существует интересующий нас предел. Легко проверить, что для любого положительного q справедливо неравенство:

$$a_1 = \sqrt{q} \leq \frac{1 + \sqrt{1 + 4q}}{2}.$$

Теперь, методом индукции можно доказать, что для любого натурального n :

$$a_n \leq \frac{1 + \sqrt{1 + 4q}}{2},$$

т.е. наша последовательность ограничена сверху. Из последнего неравенства и метода математической индукции следует, что наша последовательность монотонно возрастает:

$$a_n \leq a_{n+1} \Leftrightarrow a_n^2 - a_n - q \leq 0.$$

В силу известной теоремы анализа, если последовательность монотонно возрастает и ограничена сверху, то у нее существует предел, в данном случае, при любом положительном q .

Ответ: Последовательность сходится при любом положительном числе q . Последовательность сходится к целому числу, если q является произведением любых двух последовательных натуральных чисел.

7* .(6 баллов) For $x > 1$ determine the sum of the infinite series:

Определите сумму бесконечного ряда для $x > 1$:

$$\frac{x}{x+1} + \frac{x^2}{(x+1)(x^2+1)} + \frac{x^4}{(x+1)(x^2+1)(x^4+1)} + \dots$$

Решение

Обозначим искомую сумму буквой S , каждое из слагаемых умножим и разделим на $(x-1)$, в итоге получим ряд:

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(x-1)x^{2^i}}{x^{2^{i+1}} - 1}.$$

Используя индукцию, можно доказать формулу:

$$\sum_{i=0}^n \frac{(x-1)x^{2^i}}{x^{2^{i+1}} - 1} = \frac{x^{2^{n+1}} - x}{x^{2^{n+1}} - 1}.$$

Таким образом,

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n \frac{(x-1)x^{2^i}}{x^{2^{i+1}} - 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2^{n+1}} - x}{x^{2^{n+1}} - 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - x^{1-2^{n+1}}}{1 - x^{-2^{n+1}}} = 1.$$

Ответ: 1.

* Задача предложена преподавателями департамента математики Бард-колледжа (Нью-Йорк, США)

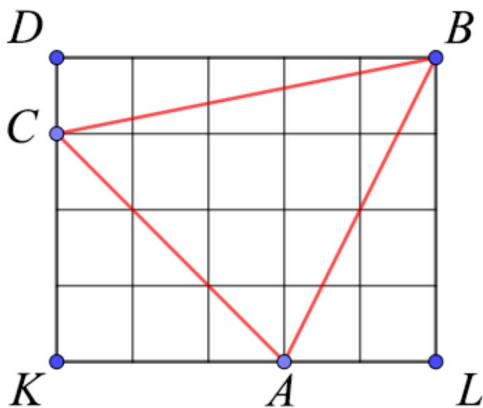
8* .(8баллов) Prove no six points of a square grid can form a regular hexagon.

Докажите, что шесть точек квадратной сетки не смогут сформировать правильный шестиугольник.

Решение

Все вершины правильного шестиугольника одновременно не могут лежать в узлах сетки, поскольку три его вершины, взятые через одну, являются вершинами правильного треугольника и уже эти три вершины не могут оказаться в узлах, а тем более все шесть вершин.

Предположим, что такой треугольник ABC построить можно. Проведем через его вершины прямые по линиям сетки и заключим треугольник во внутрь прямоугольника $KLBD$.



Примем за единицу измерения длин сторону квадрата сетки, тогда длины сторон прямоугольника $KLBD$ будут целыми числами, поэтому целым числом будет и его площадь. Площадь треугольника ABC равна разности между площадью прямоугольника $KLBD$ и суммой площадей треугольников

* Задача предложена преподавателями департамента математики Бард-колледжа (Нью-Йорк, США)

$СКА$, ALB , BDC , дополняющих данный треугольник ABC до прямоугольника $KLBD$. Длины катетов этих треугольников – целые числа, поэтому их площади – рациональные числа. Следовательно, и площадь треугольника ABC с вершинами в узлах сетки есть число рациональное.

С другой стороны, поскольку треугольник ABC

равносторонний, то его площадь равна $S = \frac{AB^2}{4} \sqrt{3}$. Отсюда

принимая во внимание, что $AB^2 = AL^2 + BL^2$ есть целое число, а $\sqrt{3}$ – число рациональное, заключаем, что S является иррациональным числом. Пришли к противоречию. Следовательно, нельзя построить равносторонний треугольник с вершинами в узлах квадратной сетки.

9.(5 баллов) Ужин. Три молодые супружеские пары собрались на дружеский ужин. Завязалась беседа. При этом были высказаны следующие утверждения:

1. Андрей: Каждый из присутствующих мужчин старше своей жены на 5 лет;
2. Ева: Не стану скрывать: я самая старшая из всех жен.
3. Ильяс: Нам с Бермет вместе 52 года.
4. Тимур: Всем шестерым вместе 151 год.
5. Бермет: Нам с Тимуром вместе 48 лет.

К сожалению, Марина так и не смогла принять участие в застольной беседе, поскольку она то и дело отлучалась на кухню. Тем не менее, можно определить не только возраст всех жен, но и всех мужей. Более того, можно даже выяснить, кто на ком женат. Как это сделать? Отвечая на поставленные вопросы, заполните следующую таблицу:

Номер супружеской пары	Имя мужа	Имя жены	Возраст мужа	Возраст жены
1				
2				
3				

Решение

Из (4) $A+E+И+Б+Т+М=151$, а учитывая (1), общий возраст мужчин на 15 лет больше, чем женщин, тогда возраст мужчин $A+И+Т=83$, а общий возраст женщин $E+Б+М=68$.

Из (1) следует, что общий возраст каждой супружеской пары является нечетным числом (так как разница 5 лет), тогда из (3) и (5) Бермет не является женой ни Ильясу, ни Тимуру.

Следовательно муж Бермет – Андрей. Тогда из (1) $A=Б+5$.

Из (3) $И=52-Б$; из (5) $Т=48-Б$. Подставляя эти выражения в равенство $A+И+Т=83$, получим:

$Б+5+52-Б+48-Б=83$, отсюда найдем что Бермет - 22 года, тогда Андрею, ее мужу, 27 лет, Ильясу – 30 лет, Тимуру – 26 лет. Следовательно жене Ильяса - 25 лет, а жене Тимура – 21 год. Из (2) известно, что Ева самая старшая из всех жен, тогда Ева – жена Ильяса, а Марина - жена Тимура.

Ответ:

Номер супружеской пары	Имя мужа	Имя жены	Возраст мужа	Возраст жены
1	Андрей	Бермет	27	22
2	Тимур	Марина	26	21
3	Ильяс	Ева	30	25

10.(6 баллов) Офицеры. На одном вечере среди гостей оказалось пять офицеров: пехотинец, артиллерист, летчик, связист и сапер. Один из них был капитаном, трое – майорами и один – в звании подполковника. Из разговоров удалось выяснить следующее:

1. У Яна такое же звание, как и у его друга сапера;
2. Офицер-связист и Франц – большие друзья;
3. Офицер-летчик вместе с Борисом и Уланом недавно побывали в гостях у Франца;
4. Незадолго до званого вечера у артиллериста и сапера почти одновременно вышли из строя радиоприемники. Оба в один вечер обратились к Улану с просьбой зайти к ним и помочь связисту устранить неисправность и не ошиблись, поскольку с тех пор приемники у обоих работают отлично;
5. Франц чуть было не стал летчиком, но потом по совету своего друга сапера избрал иной род войск;
6. Ян по званию старше Улана, а Борис- старше Франца;
7. Пятый офицер, Антон, накануне вечера был в гостях у Улана.

Определите звание каждого офицера и род войск, в котором он служит. (Иерархия военных званий: майор - старше капитана, подполковник - старше майора). Результаты Вашего анализа внесите следующую таблицу:.

Имя офицера	Звание	Род войск
Борис		
Франц		
Ян		
Антон		
Улан		

Решение

1. Так как Улан не артиллерист, не сапёр, не связист, не лётчик (это следует из условий 3,4), значит он пехотинец.
2. Так как Франц не лётчик, не сапёр, не связист (из условий. 2,5), значит от артиллерист.
3. Из условия 1 следует, что Ян может быть только майором. Так как Ян (майор) по званию старше Улана (по условию 6), значит, Улан - капитан

4. Так как Борис по званию старше Франца, по условию б, а Франц не капитан — значит Борис подполковник, а Франц майор.
5. Остаётся что Антон майор.
6. Так как сапёр майор, но не Ян (из условия1) и не Франц и не Улан и не Борис, значит сапёр Антон.
7. Из условия 3 следует, что Борис не лётчик, значит он связист, а Ян лётчик

Ответ:

Имя офицера	Звание	Род войск
Борис	подполковник	связист
Франц	майор	артиллерист
Ян	майор	летчик
Антон	майор	сапер
Улан	капитан	пехотинец



ВТОРОЙ ТУР

1. (8 баллов) Имеются два одинаковых ящика кубической формы заполненные шарами, сделанными из одного и того же материала. Шары уложены вплотную друг к другу и до самого верха. В первом ящике шары большие, а во втором – в три раза меньшего диаметра. Какой из ящиков тяжелее?

Решение

Суммарный объем шаров в первом ящике (радиус шара – R , число шаров вдоль одного измерения - K): $K^3 \frac{4}{3} \pi R^3$

.Суммарный объем шаров во втором ящике (радиус шара – $R/3$, число шаров вдоль одного измерения - $3K$):

$(3K)^3 \frac{4}{3} \pi (R/3)^3$. Очевидно, что эти объемы равны.

Ответ: ящики весят одинаково.

2.(8 баллов) Докажите, что среди любых шести человек найдутся либо трое попарно незнакомых друг с другом, либо трое попарно знакомых.

Решение

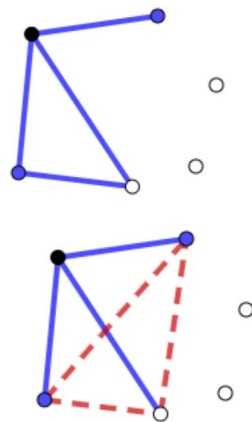
Поставим шесть точек, соответствующие шести людям. Если люди знакомы между собой, соединим соответствующие точки красным отрезком, если не знакомы, то синим. Тогда,

если на нашем рисунке есть красный треугольник, это означает, что существует три попарно знакомых между собой человека, а если есть синий треугольник, то существует три попарно незнакомых между собой человека.

Рассмотрим любую из шести точек. Из неё выходит пять отрезков. Из пяти отрезков есть по крайней мере три одного цвета. Предположим, есть три синих отрезка (случай, когда есть три красных отрезка, рассматривается аналогично.)

Если какие-то два конца этих отрезков соединены между собой синим (сплошная линия), то есть синий треугольник.

Если же все концы этих отрезков соединены между собой красным (пунктирная линия), то получается, что есть красный треугольник.



3. (10 баллов) На классной доске написаны числа 1, 2, 3, ..., 2014. На каждом шаге стираем два числа и вместо них пишем их сумму или разность. Понятно, что после достаточного количества шагов на доске останется одно число. Докажите, что это число не может быть двойкой.

Решение:

Сумма или разность чисел с одинаковой четностью число четное; четного и нечетного — нечетное. Следовательно, после каждого шага число нечетных чисел или не изменится,

или уменьшится на 2. Так как изначально нечетных чисел 1007, конечное число будет нечетным.

4.(10 баллов) Петя с мамой играют в следующую игру: Петя называет маме некоторое число A , мама называет Пете число B , причем число A -двузначное и не содержит одинаковых цифр; число B -двузначное. Затем Петя начинает прибавлять к своему числу число B , т.е. получает суммы $A+B$; $A+2B$; $A+3B$ и т.д. Если на некотором шаге Петя получает число, две последовательные цифры которого одинаковые, то он выиграл. Если - нет, то выиграла мама. Сможет ли мама всегда выигрывать в эту игру? (т.е. для любого числа A , названного Петей, найти некоторое число B , обеспечивающее выигрыш).

Решение

Петя всегда выигрывает, то есть у мамы нет выигрышной стратегии. Это связано с тем, что у Пети неограниченное число шагов.

5.(10 баллов) На плоскости дан прямоугольник со сторонами 1 и 3. Найти площадь минимального квадрата, покрывающего этот прямоугольник (т.е., когда любая точка прямоугольника лежит внутри квадрата).

Решение

Возможно лишь два положения прямоугольника внутри квадрата при заданном условии: 1) прямоугольник лежит вдоль стороны квадрата, в этом случае, сторона квадрата равна 3; 2) срединные оси прямоугольника лежат на диагоналях квадрата. Это тоже надо доказать...

В случае 1) площадь квадрата равна 9. В случае 2) площадь квадрата легко вычисляется, и равна 8. Поэтому, реализуется второй случай.

Ответ: 8

6.(12 баллов) Докажите, что для любого целого положительного n

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \dots + n)^2.$$

Решение

Используем метод математической индукции.

Проверим истинность равенства для $n = 1$: $1^3 = 1^2$ - равенство верно.

Тогда предположим истинность равенства для $n = k$:

$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + k^3 = (1 + 2 + 3 + \dots + k)^2$, для любого целого положительного k .

Принимая во внимание формулу суммы арифметической

последовательности $1 + 2 + 3 + \dots + k = \frac{k(k+1)}{2}$ получим:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + k^3 = (1 + 2 + 3 + \dots + k)^2 = \left(\frac{k(k+1)}{2} \right)^2.$$

Докажем что равенство истинно для $n = k + 1$, для этого к предыдущему равенству добавим слева и справа $(k + 1)^3$:

$$\begin{aligned} 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + k^3 + (k+1)^3 &= \left(\frac{k(k+1)}{2} \right)^2 + (k+1)^3 = \\ &= \frac{k^2(k+1)^2 + 4(k+1)^3}{4}, \end{aligned}$$

Тогда

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + k^3 + (k+1)^3 = \left(\frac{(k+1)(k+2)}{2} \right)^2.$$

Т.к. равенство истинно для случая $n = k + 1$, то согласно методу математической индукции, исходное равенство справедливо для любого целого положительного n .

7.(12 баллов) Натуральное число будем называть «счастливым», если сумма всех его цифр равна 7. Перенумеруем все «счастливые» числа в порядке их возрастания. Какой номер в этой последовательности будет у числа 2014?

Решение

$$1+7+28+28+2=66.$$

Однозначных чисел	1
Трехзначных чисел вида: abc , $a > 0$	28
Двузначных чисел вида: ab , $a > 0$	7
Четырехзначных чисел вида: $1abc$	28
Числа 2005, 2014	2

Ответ: 66

События следующих задач происходит на острове, заселенном рыцарями и лжецами. Как водится, рыцари всегда говорят правду, а лжецы всегда лгут. И опять, шпиономания. Шпионы – нормальные люди, которые могут лгать или говорить правду, в зависимости от своей выгоды.

8. (10 баллов) На этот раз перед судом предстали трое обвиняемых A , B , C . Известно, что один из них рыцарь, один лжец и один шпион. На суде события развивались так: A заявил B , что он шпион. B обвинил C в том, что он шпион. После чего

C , указав то ли на A , то ли на B , заявил: «На самом деле шпион – это он». После этого суд смог изобличить шпиона. Обратите внимание, что суд знал, на кого указывал C , просто это неизвестно Вам. Так кто из них кто был на самом деле? Выберите правильный ответ и объясните свой выбор:

- а) A - рыцарь, B - лжец, C - шпион
- б) A - рыцарь, B - шпион, C - лжец
- в) A - лжец, B - рыцарь, C - шпион
- г) A - лжец, B - шпион, C - рыцарь
- д) A - шпион, B - лжец, C - рыцарь
- е) A - шпион, B - рыцарь, C - лжец

Решение

Задачу невозможно было бы решить, если бы в условиях не было ссылки на то, что суд изобличил шпиона, после того как на него указал C : ведь мы знаем, что суд смог установить, кто из троих шпион, и это весьма важная "зацепка"!

Предположим, что C обвинил A в том, что тот шпион.

Располагая этими данными, судья не мог бы решить, кто шпион, поскольку они позволяют лишь утверждать, что либо A - шпион, B - лжец и C – рыцарь, либо B - шпион, A - рыцарь и C - лжец, либо C - шпион, A - лжец и B - рыцарь.

Таким образом, если C указал на A как на шпиона, то судья не мог бы изобличить настоящего шпиона.

Посмотрим теперь, что произошло бы, если бы C указал на B . Тогда B обвиняли бы в том, что он шпион, двое: A и C .

Выдвинутые A и C обвинения либо оба истинны, либо оба ложны. Если бы они были оба истинны, то B действительно был бы шпионом, а так как A и C оба сказали правду, они оба должны были бы быть рыцарями ("вакансия" шпиона занята B). Но по условиям задачи среди подсудимых A , B и C не может быть двух рыцарей. Следовательно, предъявленные B обвинения в шпионаже ложны. Значит, B - не шпион. Мог бы A быть шпионом? Нет, так как если бы A был шпионом, то

взаимные обвинения B и C в шпионаже были бы ложны. Следовательно, B и C были бы (оба) лжецами (что противоречит условиям задачи.) Остается единственно возможный случай: шпион - C (B , обвинивший C в шпионаже, рыцарь, а A , обвинивший B , лжец).

Итак, если C указал на A как на шпиона, то судья не смог бы установить, кто из троих в действительности шпион. Но если C указал на B , то судья смог бы решить что шпион C . А так как судья знал, на кого показал A , то C должен был указать на B , и судья на основании полученных данных изобличил C в шпионаже.

Ответ: A - лжец, B - рыцарь, C - шпион

9.(10 баллов) Вот информация об еще одном запутанном деле о шпионаже на острове. Снова три подсудимых A , B , C , и снова известно, что один из них рыцарь, один лжец и один шпион.

На суде судья спросил подсудимого A : «Вы шпион?». A ответил односложно (то ли «Да», то ли «Нет»). Затем судья спросил B : « A сказал правду?». B ответил односложно (то ли «Да», то ли «Нет»). В этот момент A заявил: « C не шпион». Судья закричал: «Я и раньше это знал, а теперь я знаю точно, кто из них шпион!» и изобличил шпиона. Под словами «Я и раньше это знал» судья имел в виду "вывел путем логических умозаключений из показаний A и B ". Определите, кто из них был кто на самом деле? Выберите правильный ответ и объясните свой выбор:

- a) A - рыцарь, B - лжец, C - шпион
- b) A - рыцарь, B - шпион, C - лжец
- c) A - лжец, B - рыцарь, C - шпион
- d) A - лжец, B - шпион, C - рыцарь
- e) A - шпион, B - лжец, C - рыцарь
- f) A - шпион, B - рыцарь, C - лжец

Решение

Мы не знаем, что ответили A и B , поэтому нам необходимо рассмотреть четыре возможных случая:

- 1) A и B оба сказали "да";
- 2) A сказал "нет", B сказал "да";
- 3) A сказал "да", B сказал "нет";
- 4) A и B оба сказали "нет".

Все эти четыре случая встретятся нам и в следующих двух задачах, поэтому мы тщательно проанализируем их сейчас.

Случай 1: A и B оба сказали "да". Так как A утверждает, что он шпион, то A либо лжец, либо шпион (рыцарь не станет называть себя шпионом). Если A лжец, то он солгал и в том случае, когда утверждал, что занимается шпионажем.

Следовательно, B солгал, утверждая, что A сказал правду. Значит, B не рыцарь, а поскольку A лжец, то B шпион, и, наконец, C должен быть рыцарем. Таким образом, если A - лжец, то B - шпион, а C - рыцарь.

Предположим теперь, что A - шпион. Тогда он сказал правду, поэтому B , утверждая, что A сказал правду, не погрешил против истины. Следовательно, B должен быть рыцарем. Но тогда C может быть только рыцарем. Таким образом, если A лжец, то B шпион, а C рыцарь. Запишем оба возможных варианта (1а и 1б) случая 1 в следующем виде:

	A	B	C
1а	Рыцарь	Шпион	Рыцарь
1б	Шпион	Рыцарь	Лжец

Случай 2: A сказал "нет", B сказал "да". Так как A отрицает, что он шпион, то A либо рыцарь, либо шпион (лжец солгал бы и сказал бы о себе, что он шпион). Если A - рыцарь, то он сказал правду. Значит, B также сказал правду, когда заявил, что A сказал правду, поэтому B не может быть лжецом. Следовательно, B должен быть шпионом. Но тогда C может быть только лжецом. Если A - шпион, то он солгал.

Следовательно, B также солгал, когда утверждал, что A сказал правду. Значит, B лжец, и тогда C может быть только рыцарем. Оба возможных варианта случая 2 (2а и 2б) запишем в следующем виде:

	A	B	C
2а	Рыцарь	Шпион	Лжец
2б	Шпион	Лжец	Рыцарь

Случай 3: A сказал "да", B сказал "нет". Так как A утверждает о себе, что он шпион, то (как и в случае 1) A должен быть лжецом или шпионом. Если A - лжец, то он солгал, но тогда B сказал правду. Значит, либо B - рыцарь (и C - шпион), либо B - шпион (и C - рыцарь). Если A - шпион, то он сказал правду, но тогда B солгал. Значит, B - лжец и C - рыцарь. Таким образом, в случае 3 возможны три варианта:

	A	B	C
3а	Лжец	Рыцарь	Шпион
3б	Лжец	Шпион	Рыцарь
3в	Шпион	Лжец	Рыцарь

Случай 4: A и B оба сказали "нет". Так как A отрицает, что он шпион, то (как в случае 2) A либо рыцарь, либо шпион.

Предположим, что A - рыцарь. Тогда A сказал правду, а B солгал. Следовательно, B - лжец (а C - шпион) или B - шпион (а C - лжец). Предположим, что A - шпион. Тогда он сказал правду. Значит, B также сказал правду, поэтому B - рыцарь (а C - лжец). Таким образом, в случае 4 возможны три варианта (как и в случае 3):

	A	B	C
4а	Рыцарь	Лжец	Шпион
4б	Рыцарь	Шпион	Лжец
4в	Шпион	Рыцарь	Лжец

Для удобства сведем все четыре случая в одну таблицу.

	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>
1а	Рыцарь	Шпион	Рыцарь
1б	Шпион	Рыцарь	Лжец
2а	Рыцарь	Шпион	Лжец
2б	Шпион	Лжец	Рыцарь
3а	Лжец	Рыцарь	Шпион
3б	Лжец	Шпион	Рыцарь
3в	Шпион	Лжец	Рыцарь
4а	Рыцарь	Лжец	Шпион
4б	Рыцарь	Шпион	Лжец
4в	Шпион	Рыцарь	Лжец

Обратимся снова к условиям задачи. После того как *A* и *B* ответили на вопросы судьи, тот сумел установить, что *C* не шпион. В случае 3 судья не мог бы установить, шпион ли *C* или рыцарь. В случае 4 судья не смог бы установить, шпион ли *C* или лжец. Но судья со всей определенностью заявил, что *C* не шпион. Значит, случаи 3 и 4 отпадают и остается либо случай 1, либо случай 2.

Когда судья утверждает, что *C* не шпион, ему известно, что *A* сказал правду. Тем самым судье известно, что *A* либо рыцарь, либо шпион. В случае 2 судья не смог бы определить, рыцарь ли *A* или шпион, и установить, кто шпион. Таким образом, остается только случай 1: судья знал, что *A* не мог быть лжецом (так как *A* сказал правду). Следовательно, *A* должен был быть шпионом.

Ответ: *A* - шпион, *B* - рыцарь, *C* – лжец

10. (10 баллов) А вот информация о самом запутанном деле на острове. В этом деле было три подсудимых A , B , C , и было известно, что один из них рыцарь, один лжец и один шпион. Открывая заседание, судья заявил: «Сейчас я задам серию вопросов. На каждый вопрос необходимо отвечать только «Да» или «Нет». Как только мне станет ясно, кто шпион, я изобличу его и остановлю процесс. Как только станет ясно, что кто-то из вас не шпион, я тут же отпущу невиновного, не дожидаясь конца процесса».

Затем судья обратился к A : «Вы шпион?». A ответил.

Затем судья спросил B : «Правду ли сказал A ?». B ответил.

После этого судья немного подумал и спросил C : «Вы шпион?». C ответил и судья тут же изобличил шпиона. Кто был шпионом? Выберите правильный ответ и объясните свой выбор:

- а) A ; б) B ; в) C .

Решение

Поскольку судья задал подсудимым A и B одинаковые вопросы, как и в предыдущей задаче, мы можем воспользоваться уже знакомой нам таблицей из решения задачи 9.

Рассмотрим тот момент судебного заседания, когда судья спросил подсудимого C , шпион ли тот. В этот момент судья не мог утверждать ни об одном из трех подсудимых, что тот заведомо не шпион, поскольку в противном случае судье пришлось бы освободить невиновного из-под стражи. Тем самым случаи 1 и 2 отпадают, так как в каждом из них судья бы знал, что C либо рыцарь, либо лжец, и освободил бы C . Следовательно, нам остается рассмотреть случаи 3 и 4.

Как мог рассуждать судья, выслушав ответ подсудимого C ? В случае 3 судье известно, что C либо шпион, либо рыцарь. Если бы C на вопрос судьи ответил "нет", то судья не узнал бы ничего нового и не мог бы никого изобличить. Но если бы C ответил "да", то судья мог бы с уверенностью утверждать, что

C шпион, так как рыцарь не мог бы сказать о себе, будто он шпион. Таким образом, в случае 3 как шпион был изобличен C .

В случае 4 судье известно, что C либо шпион, либо лжец. Если бы C ответил "да", то судья не мог бы утверждать, что C - шпион (так ответить мог бы и лжец, и шпион). Но если бы C ответил "нет", то судья установил бы, что C шпион, поскольку лжец не способен сказать правду и признаться, что он не шпион. Таким образом, в случае 4 C был бы также изобличен как шпион.

Интересно отметить, что мы не можем сказать, какой из двух случаев (3 или 4) имеет место в действительности, как не можем узнать, что ответил ("да" или "нет") C судье. Нам известно лишь, что судья смог определить, кто из обвиняемых шпион, поэтому либо все происходило, как в случае 3, и C ответил "да", либо все происходило, как в случае 4, и C ответил "нет". И в том и в другом случае C был изобличен как шпион, поэтому мы можем с уверенностью сказать, что C - шпион.

Ответ: C – шпион

11.(10 баллов) Даны первые пять членов числовой последовательности:

66, 26, 1216, 11121116, 31123116.

Кроме того, известно, что седьмой ее член равен 11131221121113122116. Каждый член этой последовательности определяется предыдущим ее членом в соответствии с некоторым правилом. Найдите это правило и определите шестой и восьмой члены последовательности.

Решение

Читаем первый член: «две шестерки». Это записываем как второй член: 26.

Далее, читаем второй член: «одна двойка, одна шестерка». То есть третий член: 1216.

Далее, читаем третий член: «одна единица, одна двойка, одна единица, одна шестерка». То есть четвертый член: 11121116.

Далее, читаем четвертый член: «три единицы, одна двойка, три единицы, одна шестерка». То есть пятый член: 31123116.

Далее, читаем пятый член: «одна тройка, две единицы, одна двойка, одна тройка, две единицы, одна шестерка». То есть шестой член: 132112132116.

И так далее.

Ответ: шестой член= 132112132116,

восьмой член= 311311222112311311222116.

ВТОРОЙ ТУР

1. На книжной полке стоят рядом два тома учебника «Введение в математический анализ». Страницы каждого тома имеют вместе толщину 2 см, а обложка (каждая) 2 мм. Червь прогрыз (перпендикулярно страницам) от первой страницы первого тома до последней страницы второго тома. Путь какой длины он прогрыз?

Решение

Ответ становится понятным, если поставить рядом, в правильном порядке, слева направо, два тома.

Ответ: 4мм.

2. Гусеница хочет проползти из одного угла, находящегося на полу кубической комнаты, в противоположный (по диагонали куба) угол на потолке. Найти кратчайший для такого путешествия путь по стенам комнаты.

Решение

Можно рассмотреть плоскую развертку куба и убедиться в том, что прямая — кратчайшая линия — соединяющая противоположные вершины проходит через середину ребра, образованного гранями, на которых лежат эти вершины.

Ответ: через середину противоположной стороны грани.

3. Решить уравнение:

$$2\sqrt[3]{(x+1)^2} + 2\sqrt[3]{(x-1)^2} = 5\sqrt[3]{x^2-1}$$

Решение

Разделим все уравнение на правую часть, приняв во внимание формулу разности квадратов:

$$2\sqrt[3]{(x+1)^2} + 2\sqrt[3]{(x-1)^2} = 5\sqrt[3]{x^2-1} \Leftrightarrow \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}} + \sqrt[3]{\frac{x-1}{x+1}} = 2,5.$$

Теперь введем обозначение $\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}} = t$ и получим квадратное

$$\text{уравнение: } t + \frac{1}{t} = 2,5 \Leftrightarrow t^2 - 2,5t + 1 = 0.$$

Корни этого уравнения: 2 и 0,5. Следовательно,

$$\frac{x+1}{x-1} = 2^3; \quad \frac{x+1}{x-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^3.$$

Решив эти уравнения, получим ответ: $x = 9/7$; $x = -9/7$.

Ответ: $\pm \frac{9}{7}$

4. Даны арифметическая прогрессия $a_0, a_1, \dots, a_n, \dots$ и геометрическая прогрессия $b_0, b_1, \dots, b_n, \dots$. Обе прогрессии составлены из положительных чисел, причем выполняются соотношения: $a_0 = b_0$, $a_1 = b_1$. Доказать, что $a_n \leq b_n$ при $n \geq 2$.

5. Доказать, что дискриминант квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$ с целыми коэффициентами не может быть равным 2015.

Решение

Проведем доказательство от противного, то есть предположим, что имеет место равенство $b^2 - 4ac = 2015$.

Тогда,

$$\begin{aligned} b^2 &= 4ac + 2015 = 4ac + 2012 + 3 = 4(ac + 503 + 0,75) = \\ &= 2^2(ac + 503 + 0,75). \end{aligned}$$

Понятно, что квадрат справа получится только в том случае, когда внутри скобок стоит квадрат целого числа, что невозможно из-за наличия дробной части, или квадрат числа вида $m + 0,5$, где m — целое число. Последнее тоже невозможно, так как дробная часть квадрата числа вида $m + 0,5$ всегда равна $0,25$.

Таким образом выяснилось, что наше предположение неверно.

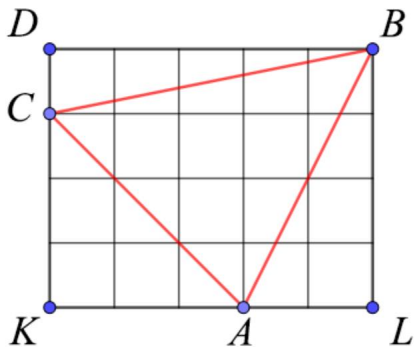
6. Плоскость покрыта сеткой с квадратными ячейками стороны которых равны 1. Докажите, или опровергните следующее утверждение: «существует равносторонний треугольник с вершинами в узлах вышеуказанной сетки».

Решение

Предположим, что такой треугольник ABC построить можно. Проведем через его вершины прямые по линиям сетки и заключим треугольник во внутрь прямоугольника $KLBD$.

Примем за единицу измерения длин сторону квадрата сетки, тогда длины сторон прямоугольника $KLBD$ будут целыми числами, поэтому целым числом будет и его площадь. Площадь треугольника ABC равна разности между площадью прямоугольника $KLBD$ и суммой площадей треугольников $СКА$, ALB , BDC , дополняющих данный треугольник ABC до прямоугольника $KLBD$. Длины катетов этих треугольников –

целые числа, поэтому их площади - рациональные числа. Следовательно, и площадь треугольника ABC с вершинами в узлах сетки есть число рациональное.



С другой стороны, поскольку треугольник ABC равносторонний, то его площадь равна

$$S = \frac{AB^2}{4} \sqrt{3}. \quad \text{Отсюда принимая во внимание, что}$$

$$AB^2 = AL^2 + BL^2 \text{ есть целое число, а}$$

$\sqrt{3}$ - число рациональное, заключаем, что S является иррациональным числом. Пришли к противоречию. Следовательно, нельзя построить равносторонний треугольник с вершинами в узлах квадратной сетки.

Ответ: такого треугольника не существует.

7. Что больше: $\sin(\cos x)$ или $\cos(\sin x)$? Обоснуйте Ваш ответ.

Решение

Так как функции \cos и \sin периодические с периодом 2π , то неравенство достаточно доказать только для x из отрезка $[-\pi, \pi]$. Так как $\cos(\sin(-x)) = \cos(-\sin(x)) = \cos(\sin(x))$ и

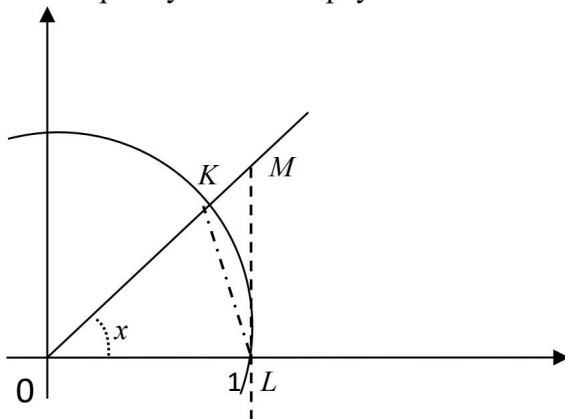
$\sin(\cos(-x)) = \sin(\cos(x))$, т. е. обе функции чётные, то достаточно доказать неравенство при x из отрезка $[0, \pi]$. При x из полуинтервала $(\pi/2, \pi]$ справедливы неравенства $\sin(\cos(x)) < 0 < \cos(\sin(x))$. Поэтому достаточно доказать неравенство при x из отрезка

$[0, \pi/2]$. Заметим, что при x из отрезка $[0, \pi/2]$ выполнено неравенство $0 \leq \sin x \leq x$, а \cos — убывающая функция.

Поэтому $\sin(\cos x) \leq \cos x \leq \cos(\sin x)$, причём равенство в первом случае достигается только при $\cos(x) = 0$, а во втором только при $x = 0$. Следовательно, при x из отрезка $[0, \pi/2]$ справедливо неравенство $\sin(\cos(x)) < \cos(\sin(x))$.

P.S. Докажем неравенство $\sin x \leq x$, а вместе с ним и неравенство $x \leq \operatorname{tg} x$, которые используются и в курсе высшей математики.

Взяв на единичном круге два радиуса OK и OL и обозначив угол между ними x (x — измеряем в радианах, то есть, например, пишем не 45° , а $\pi/4$), получим, треугольник OKL , площадь которого не превосходит площадь сектора OKL . В свою очередь, площадь сектора OKL не превосходит площадь треугольника OML , где OM содержит OK , а ML и OL являются катетами прямоугольного треугольника.



Выразив площадь указанных фигур: площадь треугольника OKL равна $0,5 \cdot l \cdot \sin x$; площадь сектора OKL равна $0,5 \cdot l \cdot x$; площадь треугольника OML равна $0,5 \cdot l \cdot \operatorname{tg} x$, получим $0,5 \sin x \leq 0,5x \leq 0,5 \operatorname{tg} x$.

Ответ: $\sin(\cos x) < \cos(\sin x)$

Вы по прежнему находитесь на удивительном острове, где все обитатели этого острова никогда не высказывают никаких утверждений; они лишь задают вопросы, причем, только те вопросы, на которые можно ответить только «да» или «нет». Каждый из обитателей острова относится к одному из двух типов – типу А или типу В. Обитатели типа А задают только такие вопросы, правильным ответом на которые является «да». Обитатели типа В, задают лишь те вопросы, на которые правильным ответом является «нет». Например, житель типа А может спросить: «Равняется ли два плюс два четырем?» Но он никак не может спросить, например, равняется ли два плюс два шести.

В этом туре помимо выбора правильного ответа Вы должны написать, почему Вы сделали такой выбор.

8. Вы встречаете на острове островитянина, и он спрашивает Вас: «Отношусь ли я к людям того типа, которые могли бы спросить, принадлежу ли я к типу В?». Какой вывод можно сделать по поводу этого человека?

Варианты ответов:

- (a) Это житель типа А; (b) Это житель типа В;
- (c) Эта ситуация невозможна.

Решение

Такая ситуация вполне возможна, но при этом островитянин должен принадлежать к типу B . Ни один житель острова не может спросить, относится ли он к типу B :

Если островитянин, относящийся к типу A , спрашивает: "Принадлежу ли я к типу B ?" - правильным ответом на этот вопрос будет "нет" (так как он в самом деле не принадлежит к типу B). Но человек, относящийся к типу A , не может задать вопрос, правильным ответом на который является "нет"; следовательно, ни один островитянин типа A не может задать такой вопрос. Если же такой вопрос задает островитянин типа B , то правильным ответом на него будет "да". Но человек типа B не может задавать вопросы, на которые следует отвечать "да", и, следовательно, островитянин типа B тоже никак не может задать подобный вопрос.

Поэтому, когда островитянин спрашивает, принадлежит ли он к людям того типа, которые могли бы спросить, относится ли он к типу B , правильным ответом на этот вопрос будет "нет" (так как ни один островитянин не может спросить, относится ли он к типу B). Значит, поскольку правильным ответом является "нет", то, следовательно, островитянин должен принадлежать к типу B .

Ответ: Это житель типа B

9. Вы встречаетесь на острове с супружеской парой по фамилии Смит. Миссис Смит спрашивает своего мужа: «Относишься ли ты к людям того типа, которые могли бы спросить меня, принадлежу ли я к типу A ?». Какой вывод можно сделать по поводу мистера и миссис Смит?

Варианты ответов: Отметьте правильные ответы крестиком в следующей таблице

	Тип A	Тип B	Невозможно определить тип
Мистер Смит			
Миссис Смит			

Решение

По поводу миссис Смит нельзя сказать ничего определенного, а ее супруг должен относиться к типу A . Основания для такого вывода следующие. Допустим, что миссис Смит относится к типу A . Тогда правильным ответом на ее вопрос будет "да", откуда следует, что мистер Смит мог спросить свою жену, принадлежит ли она к типу A . А поскольку миссис Смит по предположению принадлежит к типу A , то правильным ответом на этот вопрос будет "да", что позволяет считать мистера Смита относящимся к типу A . Итак, если миссис Смит принадлежит к типу A , то ее муж относится к тому же самому типу. Предположим теперь, что миссис Смит принадлежит к типу B . Тогда правильным ответом на ее вопрос будет "нет", откуда следует, что мистер Смит не относится к людям того типа, которые могли бы спросить ее, принадлежит ли она к типу A . Поэтому он не мог задать вопрос, правильным ответом на который являлось бы "нет", а значит, должен относиться к типу A . Итак, мистер Смит относится к типу A , независимо от того, к какому типу принадлежит миссис Смит.

Ответ:

	Тип <i>A</i>	Тип <i>B</i>	Невозможно определить тип
Мистер Смит	X		
Миссис Смит			X

10. Вы встречаете супругов Джона и Бетти. Бетти спрашивает своего мужа: «Относишься ли ты к людям того типа, которые могли бы спросить, принадлежит ли по крайней мере один из нас к типу *B*?». К какому типу принадлежат Джон и Бетти?

Варианты ответов: Отметьте правильные ответы крестиком в следующей таблице

	Тип <i>A</i>	Тип <i>B</i>	Невозможно определить тип
Джон			
Бетти			

Решение

Предположим, что Бетти относится к типу *A*. Тогда правильным ответом на ее вопрос является "да", и поэтому Джон мог спросить, принадлежит ли по крайней мере один из них к типу *B*. Но это приводит нас к противоречию: ведь если Джон относится к типу *A*, то невозможно, чтобы по крайней мере один из супругов принадлежал к типу *B*. Следовательно, правильным ответом на его вопрос должно быть "нет", что невозможно для человека, принадлежащего к типу *A*. Если же

Джон относится к типу B , тогда, действительно, по крайней мере один из них принадлежит к типу B , - ведь в этом случае "да" оказывается правильным ответом на его вопрос. Но поскольку ни один человек, относящийся к типу B , не может задать вопрос, правильным ответом на который является "да", то предположение о том, что Бетти принадлежит к типу A , неверно и, значит, она должна относиться к типу B .

Теперь, поскольку Бетти относится к типу B , то правильным ответом на ее вопрос является "нет"; отсюда следует, что Джон никак не может спросить ее, принадлежит ли по крайней мере один из них к типу B . Далее, если бы Джон относился к типу A , тогда он в самом деле мог задать такой вопрос, поскольку, действительно, по крайней мере один из них (а именно Бетти) принадлежит к типу B . Но поскольку задать такой вопрос он не может, то, следовательно, он тоже должен относиться к типу B .

Итак, ответ таков: оба супруга принадлежат к типу B .

Ответ:

	Тип A	Тип B	Невозможно определить тип
Джон		X	
Бетти		X	



**МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
ОЛИМПИАДА 2016
ВТОРОЙ ТУР**

1. Гриб называется *плохим*, если в нем не менее 10 червей. В лукошке 91 плохой гриб и 10 хороших. Может ли так случиться, что после того, как некоторые червяки переползут на другие грибы, все грибы станут хорошими?

Решение

Принцип Дирихле. Чтобы 91 гриб стал хорошим надо, чтобы не меньше, чем 91 червь переполз на 10 хороших грибов. Таким образом, среди этих 10 грибов найдется хотя бы один с 10-ю червями.

Ответ: нет

2. Найдите все целые решения уравнения

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{3}.$$

Решение

Отмечая, что $x \neq 0$ и $y \neq 0$, перепишем уравнение в виде:

$(x-3)(y-3) = 9$. Поскольку, x и y – целые, то возможны следующие варианты (и только они):

$$\begin{array}{ll}
 1. \begin{cases} x-3=1, \\ y-3=9. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=4, \\ y=12. \end{cases} & 2. \begin{cases} x-3=-1, \\ y-3=-9. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2, \\ y=-6. \end{cases} \\
 3. \begin{cases} x-3=9, \\ y-3=1. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=12, \\ y=4. \end{cases} & 4. \begin{cases} x-3=-9, \\ y-3=-1. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-6, \\ y=2. \end{cases} \\
 5. \begin{cases} x-3=3, \\ y-3=3. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=6, \\ y=6. \end{cases} & 6. \begin{cases} x-3=-3, \\ y-3=-3. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0, \\ y=0. \end{cases}
 \end{array}$$

Последний вариант исключён с самого начала.

Ответ: (4,12), (12,4), (6,6), (2,-6), (-6,2).

3. В шахматном турнире каждый шахматист половину своих очков набрал в играх с участниками, занявшими три последних места. Сколько человек приняло участие в турнире?

Решение

Пусть x -число участников турнира. В группе лучших из $x-3$ человек было сыграно $(x-3)(x-4)/2$ партий и набрано, в сумме, столько же очков. По условию, это половина всех очков, набранных в группе лучших, т.е. группа лучших набрала всего $(x-3)(x-4)$ очка. В группе худших (из 3-х человек) было сыграно 3 партии, что, по условию, дало этой группе 6 очков. В турнире разыгрывалось всего $x(x-1)/2$ очков. Таким образом, получаем уравнение:

$$(x-3)(x-4) + 6 = \frac{x(x-1)}{2},$$

Или, что то же самое: $x^2 - 13x + 36 = 0$. Находим корни: $x_1 = 9$, $x_2 = 4$. Второй ответ не подходит, поскольку в этом случае, в группе лучших – всего один шахматист, а значит все

свои очки (а не половину, как сказано в условии) он должен набрать играя с худшими тремя участниками.

Ответ: 9 человек

4. Тренер Модернов попарно взвесил своих спортсменов во всех возможных сочетаниях и обнаружил удивительный факт: полученные числа образуют арифметическую прогрессию: 130; 130,4; 130,8; ... ; 144. Чему равен общий вес этих спортсменов?

Решение

Пусть n -число членов в команде. Тогда, число попарных взвешиваний равно:

$$C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}.$$

С другой стороны, число попарных взвешиваний равно числу членов в данной арифметической прогрессии:

$$k = \frac{a_k - a_1}{d} + 1 = \frac{144 - 130}{0,4} + 1 = 36.$$

Таким образом, для числа членов в команде получим уравнение: $n^2 - n = 72 \Rightarrow n = 9$. Сумма всех членов прогрессии равна:

$$S = \frac{130 + 144}{2} \cdot 36 = 4.932.$$

При этом, каждый член команды взвесился 8 раз, поэтому, суммарный вес команды равен:

$$4.932 / 8 = 616,5$$

Ответ: 616,5

5. На десяти теннисных мячах написаны номера: на одном-номер «1», на двух – номер «2», на трех – номер «3», четыре мяча помечены номером «4». Мячи лежат в сумке, из которой случайным образом вынули три мяча. Какова вероятность того, что сумма номеров на вынутых мячах будет делиться на 5?

Решение

Реализуются следующие варианты: (1,2,0,0)- всего 1 вариант (1 мяч с номером «1», 2 мяча с номером «2»); (0,1,0,2) – всего $C_2^1 \cdot C_4^2 = 12$ вариантов; (0,0,2,1)- всего $C_3^2 \cdot C_4^1 = 12$ вариантов; всего возможных вариантов $C_{10}^3 = 120$. Вероятность равна:

$$\frac{1+12+12}{120} = \frac{5}{24}.$$

Ответ: 5/24.

6. Решить уравнение $13 \cdot [x] - 61 \cdot \{x\} = 0$. Здесь: $[x]$ -целая часть числа x , т.е. наибольшее целое число, не превосходящее x ; $\{x\}$ - дробная часть числа x , т.е. $x - [x]$.

Решение

$\frac{13}{61} \cdot [x] = \{x\} \in [0,1)$, поэтому, возможны следующие варианты:

$$1. [x] = 0 \Rightarrow \{x\} = 0 \Rightarrow x = 0;$$

$$2. [x] = 1 \Rightarrow \{x\} = \frac{13}{61} \Rightarrow x = 1\frac{13}{61};$$

$$3. [x] = 2 \Rightarrow \{x\} = \frac{26}{61} \Rightarrow x = 2\frac{26}{61};$$

$$4. [x] = 3 \Rightarrow \{x\} = \frac{39}{61} \Rightarrow x = 3\frac{39}{61};$$

$$5. [x] = 4 \Rightarrow \{x\} = \frac{52}{61} \Rightarrow x = 4\frac{52}{61}.$$

Ответ: $0, 1\frac{13}{61}, 2\frac{26}{61}, 3\frac{39}{61}, 4\frac{52}{61}.$

7. В каждом из двух сосудов находится по A литров воды. Из первого сосуда переливают половину имеющейся в нем воды во второй, затем из второго переливают треть имеющейся в нем воды обратно в первый, затем из первого переливают четверть имеющейся в нем воды во второй и т.д. Сколько воды окажется в каждом из сосудов после 100 переливаний?

Решение

Имеем 50 парных переливаний (из 1-го сосуда во 2-й, и наоборот). Предположим, что перед k -м ($k \geq 1$) переливанием в каждом сосуде находится одинаковое количество воды (A литров).

Тогда, в результате k -го переливания:

В 1-м сосуде: $A\left(1 - \frac{1}{k+1}\right)$ литров; во 2-м сосуде: $A\left(1 + \frac{1}{k+1}\right)$

литров.

В результате $k+1$ -го переливания:

В 1-м сосуде: $A \left(1 - \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} \left(1 + \frac{1}{k+1} \right) \right) = A$ литров;

во 2-м сосуде: $A \left(1 + \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} \left(1 - \frac{1}{k+1} \right) \right) = A$ литров.

Т.е. после каждой пары переливаний количество воды в сосудах не меняется. Далее работает метод математической индукции.

Ответ: по A литров воды.

В этом туре помимо выбора правильного ответа вы должны написать, почему вы сделали такой выбор.

8. Владелец магазина сообщил по телефону в полицию о том, что его ограбили. Трех преступников-рецидивистов A , B и C , проживающих в том районе, немедленно вызвали на допрос. Установлено следующее:

- 1) Каждый из тройки A , B и C в день ограбления побывал в магазине, и никто больше в тот день в магазин не заходил.
- 2) Если A виновен, то у него был ровно один сообщник.
- 3) Если B не виновен, то C также не виновен.
- 4) Если виновны ровно двое подозреваемых, то A - один из них.
- 5) Если C не виновен, то B также не виновен.

Что вы думаете по поводу виновности каждого из них?

	Виновен? (Да/Нет)
A	
B	
C	

Решение

Первый шаг. Предположим, что A был бы виновен. Тогда в силу высказывания (2) у него был бы ровно один соучастник - не больше, не меньше. Следовательно, кто-то один из B , C виновен, а другой не виновен. Но это противоречит высказываниям (3) и (5), из которых, если взять их вместе, следует, что B , C либо оба виновны, либо оба не виновны. Значит, A должен быть не виновен.

Второй шаг. Из высказываний (3) и (5) следует, что B и C либо оба виновны, либо оба не виновны. Если бы они были оба виновны, то других виновных не было бы (так как A не виновен). Следовательно, виновных в этом случае было бы ровно двое. В силу высказывания (4) это означало бы, что A - виновен. Тем самым мы пришли бы к противоречию, так как A не виновен. Следовательно, B и C оба не виновны.

Третий шаг. Итак, установлено, что A , B , C не виновны. Но, как следует из высказывания (1), в день ограбления никто, кроме A , B и C , в лавку не заходил и не мог совершить ограбления. Значит, никакого ограбления не было, и владелец магазина лгал.

Ответ:

	Виновен? (Да/Нет)
A	Нет
B	Нет
C	Нет

9. По обвинению в ограблении перед судом предстали A , B и C . Установлено следующее:

- 1) По меньшей мере один из трех подсудимых виновен.
- 2) Если A виновен и B не виновен, то C виновен.

Этих данных недостаточно, чтобы доказать виновность каждого из трех подсудимых в отдельности, но эти же данные

позволяют отобрать двух подсудимых, о которых известно, что один из них заведомо виновен. О каких двух подсудимых идет речь?

Варианты ответов: 1) A, B ; 2) A, C ; 3) B, C .

Решение

Двое подсудимых, один из которых должен быть виновен, это B и C . Действительно, предположим, что A не виновен. Тогда в силу высказывания (1) B или, C должен быть виновен.

С другой стороны, предположим, что A - виновен. Если B - виновен, то по крайней мере кто-то один из B и C заведомо виновен. Но предположим, что B не виновен. Тогда A - виновен, а B не виновен. Следовательно, в силу высказывания (2) C должен быть виновен, то есть и в этом случае либо B , либо C виновен.

Ответ: B, C .

10. Подсудимых четверо: A, B, C, D . Установлено следующее:

- 1) Если A и B оба виновны, то C был соучастником.
- 2) Если A виновен, то по меньшей мере один из обвиняемых B, C был соучастником.
- 3) Если C виновен, то D был соучастником.
- 4) Если A не виновен, то D виновен.

Что вы думаете об этом случае?

Отметьте правильные ответы крестиком в следующей таблице. (Крестик в таблице значит «Да», пустая ячейка - «Нет»)

	Виновен	Не виновен	Невозможно определить
A			
B			
C			
D			

Решение

Прежде всего докажем, что если A виновен, то C виновен.

Предположим, что A - виновен. Тогда в силу высказывания (2) либо B , либо C - виновен. Если B не виновен, то виновен должен быть C . Но предположим, что B - виновен. Тогда A и B оба виновны. Следовательно, в силу высказывания (1) C также виновен. Это доказывает, что если A - виновен, то C - виновен. Кроме того, в силу высказывания (3), если C - виновен, то D - виновен. Сопоставляя эти два факта, мы заключаем, что если A - виновен, то D - виновен. Но в силу высказывания (4), если A не виновен, то D - виновен.

Следовательно, независимо от того, виновен или не виновен A , подсудимый D должен быть виновен. Таким образом, виновность D не вызывает сомнений. Виновность всех остальных подсудимых остается под сомнением.

Ответ:

	Виновен	Не виновен	Невозможно определить
A			X
B			X
C			X
D	X		



1. (6 баллов) Коля и Вася живут в одном доме, на каждом этаже которого расположены 4 квартиры. Коля живет на пятом этаже в квартире 82, а Вася – на третьем этаже в квартире номер 171. Сколько этажей в доме?

Решение

Пусть n – искомое число этажей, по условию, $n \geq 5$;

$$4 \cdot 20 + 2 = 82 = 4(nk + 4) + \alpha, \text{ с некоторым целым } k \text{ и } \alpha = 1 \vee 2 \vee 3;$$

$$4 \cdot 42 + 3 = 171 = 4(nl + 2) + \beta, \text{ с некоторым целым } l \text{ и } \beta = 1 \vee 2 \vee 3;$$

Отсюда: $n \cdot k = 8 \cdot 2$ и $n \cdot l = 8 \cdot 5$, значит, $n=8$.

Ответ: 8

2. (6 баллов) Считается, что ученик A учится лучше ученика B , если в большинстве контрольных работ оценка A выше, чем оценка B . Оказалось, что A учится лучше, чем B , B – лучше, чем C , а C – лучше, чем A . Приведите пример, когда такое возможно.

Решение

Оценки A : 5, 4,3;

Оценки B : 4,3,5;

Оценки C : 3,5,4.

3. (6 баллов) Две прогрессии – арифметическая и геометрическая – имеют по три члена. Первый и последний члены одной прогрессии, соответственно, равны первому и последнему членам другой. Сумма членов какой прогрессии больше?

Решение

$$a_0 = b_0, a_0 + 2d = b_0 q^2; \Rightarrow d = a_0 \frac{q^2 - 1}{2};$$

следует выяснить, что больше: $a_0 + d$ или $b_0 q$?

$$\text{что то же самое: } a_0 \left(1 + \frac{q^2 - 1}{2} \right) \vee a_0 q?$$

$$a_0 (q - 1)^2 \vee 0.$$

Ответ: сумма членов арифметической прогрессии больше, если первые члены положительны, и наоборот, если первые члены отрицательны; суммы равны, если разность арифметической прогрессии равна нулю (знаменатель геометрической прогрессии равен единице).

4. (10 баллов) Сколькими способами можно рассадить в один ряд 3-х юношей и 4-х девушек, если девушки могут сидеть друг с другом, а юноши нет?

Решение

$$\square Д \square Д \square Д \square Д \square Д \square$$

В прямоугольниках можно разместить различными способами 3-х юношей, значит, по правилу умножения:

$$C_5^3 \cdot 3! \cdot 4! = 1440.$$

Ответ: 1440.

5. (12 баллов) Доказать, что, если число $2^n + 1$ - простое, то найдется такое целое, положительное m , для которого $n = 2^m$.

Решение

От противного, найдется такое нечетное и большее единицы l , что $n = t \cdot l$. Тогда, используя формулу для суммы геометрической прогрессии:

$$2^n + 1 = 2^{tl} + 1 = (2^t + 1) \sum_{k=0}^{l-1} (-2^t)^k - \text{составное число.}$$

6. (12 баллов) Тренер Хитромудров попарно взвесил своих спортсменов во всех возможных сочетаниях и обнаружил удивительный факт: полученные числа образуют арифметическую прогрессию: 130; 130,4; 130,8; ... ; 144. Чему равен общий вес этих спортсменов?

Решение:

Пусть n -число членов в команде. Тогда, число попарных взвешиваний равно:

$$C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}.$$

С другой стороны, число попарных взвешиваний равно числу членов в данной арифметической прогрессии:

$$k = \frac{a_k - a_1}{d} + 1 = \frac{144 - 130}{0,4} + 1 = 36.$$

Таким образом, для числа членов в команде получим уравнение: $n^2 - n = 72 \Rightarrow n = 9$. Сумма всех членов прогрессии равна:

$$S = \frac{130+144}{2} \cdot 36 = 4.932.$$

При этом, каждый член команды взвесился 8 раз, поэтому, суммарный вес команды равен:

$$4.932 / 8 = 616,5.$$

Ответ: 616,5.

7. (12 баллов) Из одинаковых кубиков составлен параллелепипед. Три грани этого параллелепипеда, имеющие общую вершину, покрасили. Оказалось, что у половины всех кубиков окрашена хотя бы одна грань. Сколько таких окрашенных кубиков?

Решение

Пусть, без ограничения общности, параллелепипед имеет размеры $k \times n \times t$, причем, $k \leq n \leq t$. Ключевым является равенство:

$$knt = 2(k-1)(n-1)(t-1).$$

Из этого соотношения следует, что «к» может принимать только два значения: 3 и 4. Подставляя эти значения в формулу решаем полученные уравнения в целых числах. Получаем следующие возможные варианты:

$$k = 4, n = 4, m = 9; x = 4 \cdot 4 \cdot 9 / 2 = 72;$$

$$k = 4, n = 5, m = 6; x = 4 \cdot 5 \cdot 6 / 2 = 60;$$

$$k = 3, n = 5; m = 16; x = 3 \cdot 5 \cdot 16 / 2 = 120;$$

$$k = 3, n = 6, m = 10; x = 3 \cdot 6 \cdot 10 / 2 = 90;$$

$$k = 3, n = 7, m = 8; x = 3 \cdot 7 \cdot 8 / 2 = 84.$$

Других вариантов быть не может, это тоже неплохо доказать.

Ответ: таких кубиков может быть 60, 72, 84, 90 или 120.

Задачи 8-10 решаются при следующих предположениях. Предположим, что вы находитесь в Лесу Забывчивости. В этом особом месте постоянно забываются самые простые вещи, вроде дня недели. Кроме того, обитатели Леса тоже очень своеобразные создания. Например, здесь можно встретить Льва и Единорога. Лев лжет по понедельникам, вторникам и средам, а в остальные дни недели говорит правду. Единорог лжет по четвергам, пятницам и субботам и говорит правду во все остальные дни. Есть здесь и два брата-близнеца, Труляля и Траляля, неотличимые друг от друга. Один из них ведет себя точно также как Лев (то есть лжет по понедельникам, вторникам и средам и говорит правду в остальные дни), а другой как Единорог (то есть лжет по четвергам, пятницам и субботам и говорит правду в остальные дни).

Во втором туре Вы должны не только отметить правильный ответ, но и объяснить логику решения.

8. (6 баллов) Вы встречаете братьев вместе и они заявляют следующее:

Первый:

1. Я лгу по субботам
2. Я лгу по воскресеньям

Второй:

1. Я буду лгать завтра

Отметьте крестиком, в какой день недели это было.

Пн	Вт	Ср	Чт	Пт	Сб	Вс

Решение

Высказывание (2) первого братца заведомо ложно, поэтому его высказывание (1) также ложно (поскольку было сделано в один день). Следовательно, первый братец не лжет по субботам. Отсюда мы заключаем, что второй братец по субботам лжет. В день встречи второй братец говорит правду (так как первый братец лжет), поэтому встреча могла произойти в понедельник, вторник или среду. Единственный из этих дней, когда он может, не погрешив против истины, заявить, что будет лгать завтра, - это среда.

Следовательно, дело было в среду.

Ответ:

Пн	Вт	Ср	Чт	Пт	Сб	Вс
		X				

9. (6 баллов) Вы снова встречаете братьев вместе и они высказывают следующие утверждения:

Первый: Если я Траляля, то он Труляля.

Второй: Если он Труляля, то я Траляля.

Отметьте крестиком, в какой день недели это было.

Пн	Вт	Ср	Чт	Пт	Сб	Вс

Решение

Оба высказывания истинны, поэтому встреча произошла в воскресенье.

Ответ:

Пн	Вт	Ср	Чт	Пт	Сб	Вс
						X

10. (18 баллов) Вы опять встречаете братьев вместе. В этот раз они особенно разговорчивы и делают следующие высказывания:

Первый: Сегодня не воскресенье

Второй: Сегодня понедельник

Первый: Завтра - один из дней, когда Труляля лжет

Второй: Лев лгал вчера.

Из этих высказываний можно получить сразу на несколько вопросов.

A. (6 баллов) Какой день недели?

Пн	Вт	Ср	Чт	Пт	Сб	Вс

B. (6 баллов) Кто из двух братьев кто?

	Траляля	Труляля
Первый		
Второй		

C. (6 баллов) Как ведет себя Траляля, как Лев или как Единорог?

Как Лев	Как Единорог

Решение

Оба брата не могут лгать в воскресенье и утверждать:

"Сегодня не воскресенье", поэтому знаменательный день не может приходиться на воскресенье. Следовательно, первый братец говорит правду, а второй (поскольку сегодня не воскресенье) лжет. Так как второй утверждает, что сегодня понедельник, то знаменательный день не может приходиться и на понедельник.

Второй братец, утверждая, что Лев лгал вчера, солгал.

Следовательно, вчера Лев говорил правду. Это означает, что вчера могли быть такие дни недели, как четверг, пятница, суббота или воскресенье, а сегодня - пятница, суббота, воскресенье или понедельник. Воскресенье и понедельник мы уже исключили, поэтому остается пятница или суббота.

Заметим, что завтра наступит один из дней, когда Труляля лжет (так сказал первый братец, говоривший правду).

Следовательно, сегодня не может быть суббота. Отсюда мы заключаем, что сегодня пятница.

Отсюда в свою очередь следует, что Труляля лжет по субботам, то есть ведет себя как Единорог. Кроме того, первый брат сегодня, то есть в пятницу, говорит правду, а это означает, что его зовут Траляля. Тем самым задача полностью решена.

Ответ:

A.

Пн	Вт	Ср	Чт	Пт	Сб	Вс
				X		

B.

	Траляля	Труляля
Первый	X	
Второй		X

C.

Как Лев	Как Единорог
	X



МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА 2018

ВТОРОЙ ТУР

1. На плоскости отмечено 5 точек с целочисленными координатами. Докажите, что середина, по крайней мере одного из соединяющих эти точки отрезков, также имеет целочисленные координаты.

Решение

Координата середины отрезка целочисленная тогда и только тогда, когда соответствующие координаты концов этого отрезка – одинаковой четности. Для каждой точки возможны следующие 4 варианта сочетания четностей ее координат:

(чет, чет), (чет, нечет), (нечет, чет), (нечет, нечет).

Поскольку точек 5, то по принципу Дирихле найдутся две точки с координатами одинаковой четности. Середина отрезка с концами в этих точках – искомая ■

2. Зарина и Полина живут в одном доме, на каждом этаже которого расположены 4 квартиры. Зарина живет на седьмом этаже в квартире 105, а Полина – на втором этаже в квартире номер 207. Сколько этажей в доме?

Решение

Пусть n – искомое число этажей, по условию, $n \geq 7$;

$$105 = 4nk + 4 \cdot 6 + \alpha, \text{ с некоторым целым } k \text{ и } \alpha = 1 \vee 2 \vee 3 \vee 4;$$

$$207 = 4nl + 4 \cdot 1 + \beta, \text{ с некоторым целым } l \text{ и } \beta = 1 \vee 2 \vee 3 \vee 4;$$

Отсюда:

$$4nk + \alpha = 81 = 4 \cdot 20 + 1,$$

$$4nl + \beta = 203 = 4 \cdot 50 + 3; \quad \text{или}$$

$$nk = 20, \quad nl = 50, \quad \text{откуда: } n = 10.$$

Ответ: 10

3. Найдите все целочисленные решения уравнения

$$2x^2 + 5y^2 - 4xy - 2y - 4x + 5 = 0.$$

Решение

Уравнение запишем в виде:

$$2x^2 - 4x(y+1) + 5y^2 - 2y + 5 = 0,$$

и решим его относительно x :

$$x_{1,2} = \frac{1}{2} \left[2(y+1) \pm \sqrt{-6(y-1)^2} \right],$$

откуда: $y=1, \quad x=2$.

Ответ: $x = 2, \quad y = 1$.

4. В колонию, состоящую из ста бактерий, попадает один вирус. В течение минуты он уничтожает одну бактерию и делится на два новых вируса. В это же время каждая из оставшихся в живых бактерий делится на две новые. Далее, этот процесс повторяется с новыми бактериями и вирусами. Будет ли эта колония жить бесконечно долго, или, если она в конце концов погибнет, то через какое время это произойдет?

Решение

Введем обозначения: b_n, v_n – число бактерий и вирусов,

соответственно, через n минут. В соответствии с условиями:

$$\begin{cases} v_n = 2v_{n-1}, v_0 = 1; \\ b_n = 2(b_{n-1} - v_{n-1}), b_0 = 100. \end{cases}$$

Решения этих рекуррентных соотношений легко находим:

$$v_n = 2^n, b_n = (100 - n) \cdot 2^n$$

Ответ: колония погибнет через 100 минут.

5. Эльмира не смогла принять участия в математической олимпиаде, но сказала, что может вычислить, сколько участников заняли первое, второе и третье места, соответственно, так как ей известно, что занявшие первое место набрали по 19 баллов, второе — по 18; третье — по 17, а все призеры, суммарно, набрали 89 баллов. Можете ли Вы повторить вычисления Эльмиры?

Решение:

Обозначив, x - число занявших первое место, y — второе, z — третье, сразу запишем уравнение:

$$19x + 18y + 17z = 89. \quad (1)$$

Легко получаем оценки:

$$17(x + y + z) < 19x + 18y + 17z = 89 < 19(x + y + z),$$

$$4 \frac{13}{19} = \frac{89}{19} < x + y + z < \frac{89}{17} = 5 \frac{4}{17}.$$

Так как величины x, y, z - целые, то из последнего неравенства получим:

$$x + y + z = 5. \quad (2)$$

Умножим (2) на 17 и результат вычтем из (1), исключая неизвестное z :

$$2x + y = 4.$$

Из последнего соотношения получаем оценки:

$$x + y < 2x + y = 4 < 2(x + y),$$

$$2 < x + y < 4.$$

Последнее неравенство дает:

$$x + y = 3. \tag{3}$$

Уравнения (1)-(3) образуют систему, решение которой легко находим:

$$x = 1, \quad y = z = 2$$

Ответ: одно первое место, два вторых и два третьих.

6. В шахматном турнире каждый шахматист половину своих очков набрал в играх с участниками, занявшими три последних места. Сколько человек приняло участие в турнире?

Решение

Пусть x -число участников турнира. В группе лучших (из $x - 3$ человек) было сыграно $(x - 3)(x - 4)/2$ партий и набрано, в сумме, столько же очков. По условию, это половина всех очков, набранных в группе лучших, т.е. группа лучших набрала всего $(x - 3)(x - 4)$ очка. В группе худших (из $3 - x$ человек) было сыграно 3 партии, что, по условию, дало этой группе 6 очков. В турнире разыгрывалось всего $x(x - 1)/2$ очков. Таким образом, получаем уравнение:

$$(x - 3)(x - 4) + 6 = \frac{x(x - 1)}{2},$$

Или, что то же самое: $x^2 - 13x + 36 = 0$. Находим корни: $x_1 = 9$, $x_2 = 4$. Второй ответ не подходит, поскольку в этом случае, в группе лучших – всего один шахматист, а значит все свои очки (а не половину, как сказано в условии) он должен набрать, играя с худшими тремя участниками

Ответ: 9 человек

7. Найдите сумму всех чисел, которые являются членами двух арифметических прогрессий $5, 9, 13, \dots$ и $3, 9, 15, \dots$, одновременно. При этом известно, что каждая из этих прогрессий содержит по 200 членов.

Решение

Члены первой прогрессии можно записать в виде $5 + 4n$, второй: $3 + 6m$, где n и m целые числа, такие, что $0 \leq n, m \leq 199$.

Числа, являющиеся одновременно членами двух арифметических прогрессий удовлетворяют уравнению $5 + 4n = 3 + 6m$. Приведем подобные члены, и разделив на 2, получим $3m - 2n = 1$. Так как правую часть уравнения можно записать в виде $3 \cdot 1 - 2 \cdot 1$, его можно записать в виде $3(m - 1) - 2(n - 1) = 0$. Поэтому, общее решение уравнения $m - 1 = 2k$; $n - 1 = 3k \Leftrightarrow m = 1 + 2k$; $n = 1 + 3k$, где $k = 0, 1, 2, \dots$.

Условие $n \leq 199$ дает правую границу для значений k : $k \leq 66$.

Итак, выяснилось, что нужно найти сумму чисел, которые можно записать в виде

$$5 + 4n = 5 + 4(1 + 3k) = 9 + 12k, \text{ где } 0 \leq k \leq 66.$$

Для этого используем формулу для суммы членов арифметической прогрессии и получим:

$$\frac{9 + (9 + 12 \cdot 66)}{2} \cdot 67 = 27135.$$

Ответ: 27135.

8. Браун, Джонс и Смит работают в банке. Один из них кассир, другой менеджер, а третий клерк. Известно, что

- 1) Клерк единственный ребенок в семье и он зарабатывает меньше всех из трех.
- 2) Смит женат на сестре Брауна и зарабатывает больше менеджера.

Определите должность каждого из этих людей в банке. Ответ запишите в следующую таблицу:

	Браун	Джонс	Смит
Должность			

Решение

Составим вспомогательную таблицу: по вертикали запишем профессии, а по горизонтали - фамилии. Из (1) и (2) следует, что Браун не клерк, а также из (2), что Смит не менеджер. Также, так как Смит зарабатывает больше менеджера, он не может быть клерком и зарабатывать меньше всех из трех. Следовательно, Смит - кассир, тогда Браун - менеджер, а Джонс - клерк.

После использования всех условий задачи таблица имеет вид:

	Браун	Джонс	Смит
кассир	-	-	+
менеджер	+	-	-
клерк	-	+	-

Ответ:

	Браун	Джонс	Смит
Должность	менеджер	клерк	кассир

9. Воронов, Павлов, Ревецкий и Сухарев – четыре очень талантливых человека. Один из них танцор, другой художник, третий певец и четвертый писатель (не обязательно в соответствующем порядке). Известно, что

- 1) Воронов и Ревецкий аплодировали первому выступлению певца.
- 2) И Павлов, и писатель позировали для художника.
- 3) Биография Сухарева, написанная писателем, была бестселлером и сейчас он планирует написать биографию Воронова.
- 4) Воронов никогда не слышал о Ревецком.

Определите профессию каждого из этих людей. Ответ запишите в следующую таблицу:

	Воронов	Павлов	Ревецкий	Сухарев
Профессия				

Решение

Составим вспомогательную таблицу: по вертикали запишем профессии, а по горизонтали - фамилии. Из первого условия задачи следует, что Воронов - не певец. Из второго условия следует, что Павлов - не писатель и не художник. Из третьего условия следует, что фамилия писателя не Сухарев и не Воронов. Таким образом, становится ясно, что писатель — Ревецкий (мы пришли к этому выводу методом исключения). Теперь сопоставим второе и четвертое условия. Ревецкий позировал художнику, и в то же время Воронов Ревецкого не знает. Значит, Воронов — не художник. Ранее мы установили, что он — не певец и не писатель. Стало быть, единственно возможный вариант: Воронов — танцор. Но тогда ни Павлов, ни Сухарев уже не может быть танцором. Следовательно, Павлов — певец. И наконец, Сухарев может быть только художником, и никем иным.

После использования всех условий задачи таблица имеет вид:

	Воронов	Ревецкий	Павлов	Сухарев
певец	-	-	+	-
писатель	-	+	-	-
танцор	+	-	-	-
художник	-	-	-	+

Ответ:

	Воронов	Павлов	Ревецкий	Сухарев
Профессия	танцор	певец	писатель	художник.

10. Фамилии архитектора, банкира, аптекаря и продавца в небольшом городе – Картер, Флинн, Милн и Смит (не обязательно в соответствующем порядке). Известно, что

- 1) Зарплата каждого из них – целое число долларов.
- 2) Аптекарь зарабатывает в два раза больше чем продавец; архитектор зарабатывает в два раза больше чем аптекарь; банкир зарабатывает в два раза больше чем архитектор.
- 3) Флинн зарабатывает больше чем Картер, но не в два раза больше.
- 4) Смит зарабатывает на 3776 долларов больше чем Милн.

Определите профессию каждого из этих людей. Ответ запишите в следующую таблицу:

	Картер	Флинн	Милн	Смит
Профессия				

Решение

Составим вспомогательную таблицу: по вертикали запишем профессии, а по горизонтали - фамилии.

Из условия (2), получим что, если продавец зарабатывает x долларов, тогда аптекарь – $2x$, архитектор – $4x$, а банкир - $8x$. Из условия (2) и (3) следует, что Флинн не аптекарь и не продавец, а Картер не банкир. Так как 3776 делиться нацело только на 1,2,4 и 8, то из условий (1), (2) и (4) следует, что Смит зарабатывает ровно в 2 раза больше, чем Милн. Тогда Милн не банкир, а Смит – не продавец. Используя все выводы, предположим

- 1) если Милн – продавец, то Смит- аптекарь, тогда - Картер может быть только архитектором, а Флинн банкиром, что противоречит условию (3), значит Милн - не продавец.
- 2) если Милн – аптекарь, то Смит- архитектор, тогда - Картер может быть только продавцом, а Флинн банкиром, что не

противоречит условию (3), значит Милн - может быть аптекарем.

3) если Милн – архитектор, то Смит- банкир, тогда если Флинн не аптекарь и не продавец, возникает противоречие, значит Милн - не архитектор.

Исходя из вышеперечисленного Милн – аптекарь, Смит-архитектор, Картер - продавец, а Флинн - банкир.

После использования всех условий задачи таблица имеет вид:

	Картер	Флинн	Милн	Смит
банкир	-	+	-	-
архитектор	-	-	-	+
аптекарь	-	-	+	-
продавец	+	-	-	-

Ответ:

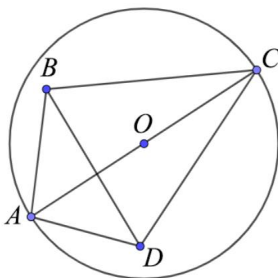
	Картер	Флинн	Милн	Смит
Профессия	продавец	банкир	аптекарь	архитектор



ВТОРОЙ ТУР

1. Три угла четырехугольника тупые. Докажите, что диагональ, проведенная из вершины острого угла, больше другой диагонали.

Решение



Нарисуем окружность, диаметром которой будет диагональ, проведенная из вершины острого угла. Так как другая диагональ соединяет вершины тупых углов, эти вершины лежат внутри проведенной окружности — расстояние между ними меньше диаметра ■

2. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 2 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 1 \cdot x_3 + 9 \cdot x_4 = 2, \\ 2 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 1 \cdot x_4 + 9 \cdot x_1 = 0, \\ 2 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 + 1 \cdot x_1 + 9 \cdot x_2 = 1, \\ 2 \cdot x_4 + 0 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + 9 \cdot x_3 = 9. \end{cases}$$

Решение

Складывая все уравнения системы, найдем:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1.$$

Исключим при помощи этого уравнения неизвестное x_1 из всех уравнений системы:

$$\begin{cases} 2x_2 + x_3 - 7x_4 = 0, \\ 7x_2 + 9x_3 + 8x_4 = 9, \\ 8x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ x_2 + 9x_3 + 2x_4 = 9, \end{cases}$$

Исключаем x_3 из последней системы:

$$\begin{cases} x_2 + x_4 = 0, \\ -17x_2 + 65x_4 = 9. \end{cases}$$

Из последней системы находим:

$$x_2 = -\frac{9}{82}, \quad x_4 = \frac{9}{82}.$$

Оставшиеся неизвестные можно искать из разных уравнений:

$$x_3 = \frac{81}{82}, \quad x_1 = \frac{1}{82}. \quad \blacksquare$$

Ответ: $x_1 = \frac{1}{82}$, $x_2 = -\frac{9}{82}$, $x_3 = \frac{81}{82}$, $x_4 = \frac{9}{82}$.

3. Доказать, что для любого целого и положительного n , число, состоящее из 3^n единиц делится на 3^n нацело.

Решение

Применяем метод математической индукции.

База: $n=1$; $111/3=37$.

Индукционный переход: пусть A -число, состоящее из 3^{n-1} единиц, и оно, по предположению, делится на 3^{n-1} . Тогда, число, состоящее из 3^n единиц, имеет вид: AAA . Докажем, что оно делится на 3^n . Представим это число в виде:

$$AAA = A + A \cdot 10^{3^{n-1}} + A \cdot 10^{2 \cdot 3^{n-1}} = A \cdot \left(1 + 10^{3^{n-1}} + 10^{2 \cdot 3^{n-1}}\right).$$

Число в круглых скобках делится на 3, поскольку, сумма его цифр равна трем (признак делимости на 3); число A делится на 3^{n-1} , и все доказано ■

4. Все положительные целые числа, начиная с единицы, выписаны подряд в порядке возрастания. Какая цифра стоит на 2019 месте?

Решение

Количество однозначных чисел: 9,

Количество двузначных чисел: $99 - 10 + 1 = 90$,

Количество трехзначных чисел: $999 - 100 + 1 = 900$.

Количество мест, занятых однозначными числами: 9,

Количество мест, занятых двузначными числами: $90 \cdot 2 = 180$,

Количество мест, занятых трехзначными числами: $900 \cdot 3 = 2700$.

Значит, 2019 место находится среди трехзначных чисел, и это $2019 - 189 = 1830$ место. Найдем это трехзначное число: $1830 = 610 \cdot 3$, т.е. нас интересует третья цифра в числе 610: 610, это цифра 0 ■

Ответ: 0.

5. Известно, что сумма n первых членов арифметической прогрессии равна сумме m первых членов этой же прогрессии ($m > n$). Сколько первых членов этой прогрессии нужно взять, чтобы их сумма оказалась равной нулю?

Решение

Воспользуемся для суммы формулой следующего вида:

$$S_n = \left[a_1 + \frac{(n-1)}{2} \cdot d \right] \cdot n.$$

Из условия $S_n = S_m$ находим:

$$a_1 = -\frac{m+n-1}{2} \cdot d. \quad (4)$$

Так как $S_k = 0$, по условию, то

$$a_1 + \frac{k-1}{2} \cdot d = 0, \quad (5)$$

Вычитая (4) из (5), находим: $k = n + m$ ■

Ответ: $n + m$.

6. Доказать, что для любого целого положительного n справедливо утверждение: если действительные числа a_1, a_2, \dots, a_n положительны и $a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n = 1$, то выполнено неравенство: $a_1 + a_2 + \dots + a_n \geq n$.

Решение

Применяем метод математической индукции.

База: $n = 1$; очевидно, так как $a_1 = 1$.

Индукционный переход: пусть из того, что $b_i > 0$, при $i = 1, 2, \dots, n-1$, и $b_1 \cdot b_2 \cdot \dots \cdot b_{n-1} = 1$ следует неравенство $b_1 + b_2 + \dots + b_n \geq n-1$.

Положим: $b_1 = a_1, b_2 = a_2, \dots, b_{n-2} = a_{n-2}, b_{n-1} = a_{n-1} \cdot a_n$; причем, без ограничения общности, будем считать, что $a_{n-1} < 1$, и $a_n > 1$.

Тогда:

$$(1 - a_{n-1}) \cdot (a_n - 1) > 0 \Leftrightarrow a_{n-1} + a_n - 1 > a_{n-1} \cdot a_n \quad (6)$$

В силу индукционного предположения и (6):

$$a_1 + a_2 + \dots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n - 1 > a_1 + a_2 + \dots + a_{n-2} + a_{n-1} \cdot a_n \geq n-1,$$

Что и доказывает требуемое неравенство:

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n \geq n \quad \blacksquare$$

7. Некоторая фирма состоит из 2-х подразделений. Руководство этой фирмы решило поднять среднюю заработную плату каждого из этих подразделений, не вкладывая дополнительных средств. С этой целью, некоторого работника из 1-го подразделения перевели во 2-е подразделение, не меняя при этом его заработную плату. После этого средняя заработная плата на каждом подразделении увеличилась на \$100. Для дальнейшего улучшения показателей, руководство фирмы еще одного работника из 1-го подразделения перевело во 2-е, не меняя при этом его заработную плату. После этого средняя заработная плата на каждом подразделении увеличилась еще на 4%. Определите среднюю заработную плату работников этой фирмы.

Решение

Пусть X и Y – первоначальные средние зарплаты на 1-ом и 2-м подразделениях, соответственно. Тогда, искомая средняя зарплата на фирме (S) находится по формуле:

$$S = \frac{nX + mY}{n + m},$$

где n и m — число сотрудников на 1-ом и 2-ом подразделениях, соответственно. Понятно, что величина S не меняется в процессе описанных манипуляций. После первого перевода сотрудника получаем:

$$S = \frac{(n-1)(X+100) + (m+1)(Y+100)}{n+m} = \frac{nX + mY}{n+m} + 100 - \frac{X-Y}{n+m}; \quad (7)$$

После второй манипуляции:

$$\begin{aligned} S &= \frac{(n-2)(X+100) + (m+2)(Y+100)}{n+m} \cdot 1,04 = \\ &= \left(\frac{nX + mY}{n+m} + 100 - 2 \frac{X-Y}{n+m} \right) \cdot 1,04; \end{aligned} \quad (8)$$

Из (7) следует:

$$\frac{X-Y}{n+m} = 100;$$

Подставляя последнее соотношение в (8), получаем:

$$S = (S - 100) \cdot 1,04;$$

$$\text{Окончательно: } S = 100 \frac{1,04}{0,04} = 100 \cdot 26 = 2600 \text{ (\$)}$$

Ответ: \$ 2600.

В государстве (из 1 тура) продолжают жесткие логические испытания. Напоминаем, что узники должны выбирать одну из двух комнат. В каждой комнате находится либо принцесса, либо тигр.

Сообщение на первой двери истинно, если там находится принцесса, и ложно, если там находится тигр.

Сообщение на второй двери истинно, если там находится тигр, и ложно, если там находится принцесса.

8.

Сообщение на двери первой комнаты	Сообщение на двери второй комнаты
Что ни выберешь – все едино.	Принцесса - в другой комнате.

С какой ситуацией имеет дело узник?

Варианты ответов:

- (a) 1 комната - тигр, 2 комната – тигр;
- (b) 1 комната - тигр, 2 комната - принцесса;
- (c) 1 комната – принцесса, 2 комната – тигр;
- (d) 1 комната – принцесса, 2 комната-принцесса.

Решение

Первая надпись утверждает, что в обеих комнатах либо находятся принцессы, либо сидят тигры — ведь только в такой ситуации все равно, какую из комнат выбрать. Пусть, например, принцесса находится в первой комнате. Тогда фраза, приведенная на первой двери, истинна, отсюда следует, что во второй комнате также находится принцесса. С другой стороны, предположим, что в первой комнате сидит тигр. Тогда первая надпись будет ложной и, значит, в обеих комнатах должны находиться различные обитатели, откуда опять следует, что во второй комнате должна оказаться принцесса. Тем самым доказано, что принцесса должна находиться в комнате 2 независимо от того, кто занимает комнату 1. Наконец, поскольку принцесса находится в комнате 2, то надпись на ее двери является ложной и, следовательно, в комнате 1 должен сидеть тигр.

Ответ: 1 комната - тигр, 2 комната - принцесса.

9.

Сообщение на двери первой комнаты	Сообщение на двери второй комнаты
Что выбрать – большая разница.	Лучше выбрать другую комнату.

С какой ситуацией имеет дело узник?

Варианты ответов:

- (a) 1 комната - тигр, 2 комната – тигр;
- (b) 1 комната - тигр, 2 комната - принцесса;
- (c) 1 комната – принцесса, 2 комната – тигр;
- (d) 1 комната – принцесса, 2 комната - принцесса

Решение

Первая надпись фактически утверждает, что в обеих комнатах находятся разные обитатели (в одной — принцесса, в другой — тигр), но ничего не говорит нам о том, кто же именно в какой комнате. Если комнату 1 занимает принцесса, то утверждение на ее двери истинно; следовательно, в комнате 2 должен сидеть тигр. С другой стороны, если в комнате 1 посажен тигр, то первая надпись оказывается ложной, откуда следует, что на самом деле обитатели обеих комнат должны быть одинаковы, и поэтому в комнате 2 также должен находиться тигр. Итак, в комнате 2 действительно сидит тигр. Это значит, что вторая надпись является истинной и, следовательно, принцесса должна находиться в первой комнате.

Ответ: 1 комната - принцесса, 2 комната - тигр.

10. Это испытание оказалось более сложным, потому что слуги короля не успели повесить вот эти сообщения на двери комнат:

В этой комнате сидит тигр.
В обеих комнатах сидят тигры.

Узник не знает, для какой комнаты каждое из этих сообщений. Помогите ему решить эту трудную задачу.

Варианты ответов:

- (a) 1 комната - тигр, 2 комната – тигр;
- (b) 1 комната - тигр, 2 комната - принцесса;
- (c) 1 комната – принцесса, 2 комната – тигр;
- (d) 1 комната – принцесса, 2 комната - принцесса

Решение

Предположим, что верхняя надпись: «В этой комнате сидит тигр» прикреплена у дверей комнаты 1. Если принцесса находится в этой комнате, то это утверждение будет ложным — однако при этом нарушаются объявленные королем условия. Если же в первой комнате сидит тигр, то надпись на ней будет истинной — условия, объявленные королем, оказываются нарушенными вновь. Поэтому ясно, что верхняя надпись не может быть на дверях комнаты 1. Значит, она должна находиться на дверях комнаты 2; в свою очередь нижняя надпись должна располагаться на первой двери.

Итак, надпись, которая должна быть на первой двери, гласит: «В обеих комнатах сидят тигры». При этом принцесса не может находиться в комнате 1; ведь в противном случае первая табличка оказывается правдивой, что приводит нас к очевидному противоречию, будто бы в обеих комнатах сидят тигры. Следовательно, в комнате 1 сидит тигр. Отсюда сразу становится ясно, что табличка на дверях этой комнаты ложна, и поэтому в комнате 2 должна находиться принцесса.

Ответ: 1 комната - тигр, 2 комната - принцесса.

КОРОТКО ОБ АУЦА И ПРОГРАММЕ ПМИ

История АУЦА. Наш университет возник в 1993 году как Кыргызско-Американский факультет (КАФ) при Кыргызском государственном национальном университете. В 1997 году КАФ становится независимым учебным заведением и, согласно Декрету Президента Кыргызстана, преобразуется в Американский университет в Кыргызстане (АУК). АУК быстро развивается, приобретая региональное значение, и в 2002 году Совет попечителей университета решает изменить его название на Американский университет в Центральной Азии (АУЦА).

С 2011 года, студенты двенадцати программ бакалавриата АУЦА, включая программу Прикладная математика и информатика, наряду с дипломами государственного образца, выдаваемыми Министерством образования Кыргызской Республики, получают дипломы, аккредитованные Бард Колледжем (Аннандейл-на-Гудзоне, штат Нью-Йорк, США).

В настоящее время в АУЦА обучается около 1300 студентов (30% международные студенты из США, Франции, Канады, Германии, Норвегии, Англии, Монголии, Южной Кореи, Китая, Казахстана, Таджикистана, Туркменистан, Узбекистана и Афганистана и 70% граждане Кыргызской Республики). Преподавание, в основном, ведется на английском языке. Преподавательский состав АУЦА состоит более чем из 200 высококвалифицированных местных и иностранных профессоров.

Ресурсы АУЦА. Университет располагает 550 компьютерами и 24 мультимедийными аудиториями. Наши студенты, преподаватели и гости университета имеют доступ

к беспроводному интернету (Wi-Fi) на всей территории кампуса.

Библиотека АУЦА насчитывает более 70 000 томов и более 2 000 000 электронных книг и каталогов из различных баз данных: EBRARY, Кембриджские журналы, EBSCO, JSTOR, Lexis-Nexis, Оксфордские журналы, Оксфордская справочная литература (<http://library.auca.kg>).

Дополнительные ресурсы включают юридическую клинику, бизнес-клинику, лабораторию по психологии, центр социальных исследований и студию медиа-производства. В АУЦА много активно действующих студенческих организаций и клубов: театральный, бизнеса, танцев, футбола, фрисби и других.

Университет владеет общежитием, а также оказывает содействие в поиске жилья международным студентам и студентам из регионов Республики. Подробнее ознакомиться с общежитием можно по ссылке: www.auca.kg/ru/dormitory

Финансовая поддержка в АУЦА. Финансовая поддержка предоставляется студентам с учетом их успеваемости и материального положения, а также за заслуги перед университетом. На сегодняшний день 84% студентов АУЦА получают частичную либо полную финансовую поддержку. Подробная информация можно найти на сайте: www.auca.kg/ru/admissions/financial_aid

Что такое прикладная математика. Прикладная математика – это наука, связанная с разработкой, исследованием и использованием математических моделей для получения новых знаний о природных и социальных явлениях, а также для управления различными технологическими процессами. Прикладная математика, с одной стороны, использует методы и громадный информационный потенциал, накопленный теоретическими

разделами математики, а с другой стороны, опирается на компьютерные науки, бурно развивающиеся в последние годы. Именно развитие компьютерных наук и компьютерных технологий позволило современной прикладной математике работать со сложными математическими моделями, позволяющими прогнозировать развитие комплексных геодинамических, метеорологических, астрофизических процессов, а также управлять современными производствами.

Образовательная программа ПМИ. Если вы любите математику, интересуетесь компьютерами и всем, что с ними связано, то программа «Прикладная математика и информатика» (ПМИ) – это то, что вам нужно. Как отметил еще Галилео Галилей: «Природа формулирует свои законы языком математики», а в наше время содружество математики и компьютерных наук дало нам в руки один из самых эффективных инструментов познания природы и общества: математическое моделирование. Вы сможете освоить этот инструмент и понять, как он применяется к решению сложнейших проблем естествознания и социальных наук.

Чему учат на ПМИ. Наша программа дает базовое образование по математике и компьютерным наукам. Вы получите углубленные знания по таким дисциплинам, как математический анализ, дифференциальные уравнения, теория вероятностей и математическая статистика, вычислительная математика, структуры данных и алгоритмы, программирование на языках высокого уровня, основы программной инженерии и многим другим. Кроме того, вы сможете понять, как метод математического моделирования работает в экономике (анализ финансовых рынков, оценки банковских и страховых рисков, оптимальное экономическое управление предприятиями и отраслями и т.д.) и позволяет

изучать природные и техногенные катастрофы, такие как землетрясения, цунами, оползни, сели.

В результате обучения на ПМИ Вы получите способность комплексно анализировать проблемы и процессы, возникающие в естественных и социальных науках, умение использовать на практике математические методы и современные компьютерные технологии. Владея системным подходом, умением строить и применять математические модели для описания и прогнозирования различных явлений в социальных и естественных системах, Вы будете готовы к проектной деятельности в профессиональной сфере. Обладая знаниями и навыками, полученными на нашей программе, Вы сможете изменять вид и характер своей профессиональной деятельности, работать над междисциплинарными проектами, что высоко ценится на рынке труда.

Вы станете специалистом, востребованным практически во всех областях экономики, бизнеса, науки, общественном и государственном секторах. Выпускники могут работать в банковской сфере, в консалтинговых, страховых и аудиторских компаниях, в промышленных фирмах, выполнять функции системных и бизнес - аналитиков, проектировщиков баз данных, заниматься развитием и модернизацией всевозможных компьютерных систем. Вы сможете продолжить учебу на магистерских программах по направлениям: бизнес, экономика, прикладная математика, компьютерные науки в ведущих университетах мира, в частности, США, Англии, Германии.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Рэймонд М. Смаллиан, Как же называется эта книга, 1981. — 238 с.
2. Рэймонд М. Смаллиан, Принцесса или Тигр, 1985. — 221 с.
3. Рэймонд М. Смаллиан, Алиса в стране смекалки, 1987. — 182 с.
4. Бизам Д., Герцег Я, 85 логических задач, 1975.
5. Бизам Д., Герцег Я., Многоцветная логика, 175 логических задач, 1978.
6. Wylie C.R. 101 Puzzles in Thought and Logic, Courier Corporation, 1957. — 125 p.
7. Агаханов Н. Х., Терешин Д. А., Кузнецова Г. М., Школьные математические олимпиады, 1999. — 131 с.
8. Балаян Э.Н., 700 лучших олимпиадных и занимательных задач по математике, 2015.
9. Агаханов Н. Х. Математика. Районные олимпиады. 6—11, 2010. — 192 с.
10. Балаян Э.Н. 1001 олимпиадная и занимательная задачи по математике, 2008. — 364 с.
11. Васильев Н.Б., Савин А.П., Егоров А.А. Избранные олимпиадные задачи. Математика, 2007. — 160 с.
12. Генкин С.А., Итенберг И.В., Фомин Д.В. Ленинградские математические кружки, 1994. - 272 с.
13. Галкин Е. В. Нестандартные задачи по математике. Алгебра: Учеб. пособие для учащихся 7—11 кл., 2004. — 448 с.
14. Горбачёв Н. В. Сборник олимпиадных задач по математике, 2004. — 560 с.

15. Фарков, А. В. Математические олимпиады в школе. 5-11 классы, 8-е изд., испр. и доп., 2009. — 256 с.
16. Зубелевич Г.И. Сборник задач московских математических олимпиад (с решениями). Пособие для учителей 5—8 классов. Под редакцией К. П. Сикорского, изд. 2-е, переработ., 1971. — 304 с.
17. Гальперин Г.А., Толпыго А.К. Московские математические олимпиады, 1986. — 303с.
18. Фомин Д. В. Санкт-Петербургские математические олимпиады, 1994. — 309 с.
19. Шустеф Ф.М., Фельдман А.М., Гуревич В.Ю. Сборник олимпиадных задач по математике, 1962. - 84 с.
20. В. Л. Вышенский, Н. В. Карташов, В. И. Михайловский, М. И. Ядренко. Сборник задач киевских математических олимпиад, 1984. — 240 с.
21. Рябухин Ю.М., В.П. Солтан, Чиник Б.И. Кишиневские математические олимпиады . —Кишинев: Штинца, 1983. — 76 с.
Бабинская И.Л. Задачи математических олимпиад, 1975. — 112 с.
22. Канель-Белов А. Я., Ковальджи А. К. Как решают нестандартные задачи. 60-я Московская математическая олимпиада. Подготовительный сборник, 1997. — 96 с.