Подставив в (33) найденное из (34) и окончательно получим

$$|u(x, y, t)| \leq c(x, t)\, \varepsilon^{1/2} M^{1/2} [n(n+1)]^{1/2},$$

где $c(x, t) = 4p_0 D^{1/2}(x)\, e^{P_0 t}$.

Рассмотрим случай наличия кратных корней. Не умоляя общности, предположим, что один из корней имеет кратность m, в этом случае оценка (33) запишется в виде

$$|u(x, y, t)| \leq \frac{4(n-m)M\delta\, e^{P_0 t}}{P_0} + \frac{\varepsilon D(x)\, e^{P_0 t}(n+1-m)}{\delta^m}.$$

После выбора оптимального δ получим

$$|u(x, y, t)| \leq c(x, t)\, \varepsilon^{1/(m+1)} M^{1-\frac{1}{m+1}},$$

где $c(x, t) = 8(n-m) D^{1/(m+1)}(x)\, e^{P_0 t}$.

Теорема доказана.

Литература

1. *Загорский Т.Я.* Смешанные задачи для систем дифференциальных уравнений с частными производными параболического типа. – Львов, 1961.
2. *Михайлов В.П.* Решение смешанной задачи для параболической системы методом потенциалов. – ДАН СССР, 132, 1960. – № 2.
3. *Тихонов А.Н.* О краевых условиях, содержащих производные порядка, превышающего порядок уравнения // Математический сборник, т. 26. – 1950. – № 1.
4. *Эйдельман С.Д.* Параболические системы. – М.: Наука, 1964.

С.К. Кыдыралиев,
к.ф.-м.н., доцент, ассоц. профессор направления «Естественные науки и информационные технологии», Американский университет в Центральной Азии

От барона Мюнхгаузена к ипотеке: задачи ипотечного кредитования на языке разностных уравнений

В последнее время много говорится об ипотеке, но не все знают, что существуют различные типы ипотеки. Еще меньшее количество людей знают, как правильно рассчитать схему погашения ипотечного кредита. Недвижимость трудно купить, так как она обычно дорого стоит. Для дорогих покупок можно взять кредит, но для получения большого кредита нужен солидный залог. Эта проблема решилась, когда в чью-то светлую голову пришла замечательная мысль совместить по времени две операции:

покупки недвижимости и получения кредита, залогом для которого является та самая недвижимость.

В этой работе описаны разные типы ипотеки и на языке разностных уравнений, возможно впервые, рассказано, как определить поток платежей, соответствующий ипотечному кредиту. Надеемся, что этот материал будет полезен для всех, кто имеет отношение как к получению, так и к выдаче ипотечных кредитов

Кроме того, мы рассчитываем на то, что данный материал будет использоваться в учебном процессе, и с этой целью в текст была введена задача про барона Мюнхгаузена, которая может помочь повысить интерес учащихся к излагаемому материалу.

На вопрос: «Трудно ли научиться скакать на лошади?» герои оперетты «Сильва» отвечают:

– Это зависит от ученика. (*Эдвин*)

– Это зависит от учителя. (*Сильва*)

– Это зависит от лошади. (*Бони*)

Кажется. что почти так же можно ответить на вопрос, трудно ли выучить ту или иную учебную дисциплину, заменив слово «лошадь» на словосочетание «книги и другие учебно-методические материалы».

Имеет место вечная проблема – изложить материал так, чтобы было занимательно, понятно и в то же время не легковесно.

Возможно, имеют место некоторые аналогии с маркетингом

Для того чтобы привлечь внимание покупателей к товару, нужно снабдить его привлекательной упаковкой. А для того чтобы привлечь внимание учащихся к предмету, важно подобрать интересный пример

Упаковка может привлечь внимание, но для того чтобы товар хорошо продавался, он должен иметь высокую полезность для потребителя. Точно так же забавный пример привлечет внимание к предмету, но для того чтобы учащийся захотел им овладеть, важно показать области применения этих знаний.

Разностные уравнения, которые очень хорошо подходят для моделирования экономических, финансовых . явлений [1–4, 6–8], в данной работе использованы для анализа различных типов ипотечных кредитов и смежных задач.

Однажды Барон Мюнхгаузен рассказал такую историю·

– Я с друзьями охотился на уток. Мы рассредоточились по берегам пяти озер. После того как большая стая уток села на 1-м озере, началась стрельба. Охотникам удалось подстрелить одну третью часть стаи и треть утки, а оставшаяся часть стаи перелетела на 2-е озеро. И на этом озере охотники подстрелили одну третью часть стаи и треть утки, а оставшаяся часть стаи перелетела на 3-е озеро... И наконец, оставив на 5-м озере третью часть стаи и треть утки, дальше улетела 31 утка. –

Слушатели подняли барона на смех· как это могут летать две трети от утки? Но он клялся и божился, говоря, что это произошло на самом деле. Проверьте, могла ли случиться такая история?

На первый взгляд ответ очевиден – две трети утки летать не могут, и значит, барон Мюнхгаузен окончательно заврался. Но не будем торопиться с наклеиванием ярлыков и проанализируем ситуацию, переведя ее на язык математики.

Для анализа воспользуемся линейными разностными уравнениями, предварив его краткими сведениями об этих уравнениях.

Уравнение

$$x_n = ax_{n-1} + b \qquad (1)$$

называется линейным разностным уравнением первого порядка.

Здесь, a и b – коэффициенты уравнения, x_{n-1} – переменная, описывающая состояние системы в момент $(n-1)$, x_n – в момент n. Характерной особенностью уравнения (1) является то, что оно используется для описания ситуаций, в которых состояние системы полностью определяется ее состоянием в предыдущий момент. В связи с этим уравнения вида (1) часто называются ***рекуррентными***.

Для того чтобы найти решение уравнения (1), сначала отследим несколько шагов:

$$x_1 = ax_0 + b;$$
$$x_2 = ax_1 + b,$$

и, подставив вместо x_1 его значение из предыдущего равенства, получим

$x_2 = a(a x_0 + b) + b = a^2 x_0 + a b + b;$

$x_3 = ax_2 + b,$ и повторив процесс, получим:

$x_3 = a(a^2 x_0 + a b + b) + b = a^3 x_0 + a^2 b + ab + b;$

$x_4 = a x_3 + b = a(a^3 x_0 + a^2 b + ab + b) = a^4 x_0 + a^3 b + a^2 b + ab + b.$

Тенденция ясна. Можно записать общий вид выражения:

$$x_n = a^n x_0 + a^{n-1} b + a^{n-2} b + \ldots + ab + b. \qquad (2)$$

Прочитаем равенство (2) справа налево и, использовав формулу для суммы членов геометрической прогрессии, из формулы (2) получим решение уравнения (1):

$$x_n = a^n x_0 + b\frac{1-a^n}{1-a}. \qquad (3)$$

Для того чтобы разобраться с историей Мюнхгаузена, обозначим через x_n количество уток, взлетевших с озера под номером n (тогда x_0 – это исходное количество уток в стае) и получим уравнение

$$x_n = \frac{2}{3}x_{n-1} - \frac{1}{3}. \qquad (4)$$

При этом имеет место условие $x_5 = 31$.

Далее, подставив значения в формулу (3), получим

$$31 = \left(\frac{2}{3}\right)^5 x_0 - \frac{1}{3}\cdot\frac{1-(2/3)^5}{1-(2/3)}.$$

Отсюда $x_0 = 242$.

Итак, из рассказа барона следует, что первоначально в стае было 242 утки. Последовательно подставляя значения в уравнение (4), приходим к неожиданному выводу: Мюнхгаузен поведал совершенно правдивую историю, так как

с 1-го озера взлетела $x_1 = \frac{2}{3}\cdot 242 - \frac{1}{3} = 161$ утка,

со 2-го озера $x_2 = \frac{2}{3}\cdot 161 - \frac{1}{3} = 107$ уток,

с 3-го озера $x_3 = \frac{2}{3}\cdot 107 - \frac{1}{3} = 71$ утка, с 4-го озера $x_4 = \frac{2}{3} \cdot 71 - \frac{1}{3} = 47$ уток,

и с 5-го озера $x_5 = \frac{2}{3} \cdot 47 - \frac{1}{3} = 31$ утка.

Ипотека

Ипотека – это форма кредитования покупок недвижимости, при которой покупатель в момент покупки платит только часть денег (обычно 20–40%), а остальные деньги вносит банк. При этом покупатель становится владельцем недвижимости, которая служит залогом возврата денег банку. Затем, в течение длительного промежутка времени, делая выплаты в заранее оговоренные периоды времени, покупатель погашает задолженность банку.

В экономически развитых странах ипотека является одной из наиболее популярных форм кредитования населения, так как она весьма удобна для обеих сторон: покупатель становится собственником недвижимости, избежав многих лет ожидания, необходимых для накопления всей суммы, а банк выдает кредит, имея надежное залоговое обеспечение – недвижимость, которая куплена с помощью этого кредита.

1. Ипотека с фиксированной ставкой

Пример 1

Бактыгуль покупает дом стоимостью $60 000 на условиях ипотеки. Она отдает $20 000, а остальные деньги вносит банк «Гульнура». По договоренности с банком, Бактыгуль должна расплатиться, ежеквартально выплачивая одну и ту же сумму в течение 10 лет, исходя из годовой ставки интереса 16%.

Определим эту сумму. Нетрудно увидеть, что $40 000, которые нужно вернуть банку «Гульнура» есть величина x_0, которая должна быть амортизирована за 40 периодов, при этом каждому периоду соответствуют 16%·(1/4) = 4% интереса.

Поэтому, из уравнения

$$x_n = (1 + 0{,}04)\, x_{n-1} - V$$

и формулы (3) легко получить, что

$$V = 40000/19{,}7928 = \$2021.$$

Также несложно определить сумму, которую Бактыгуль будет должна банку через 7 лет. За это время будет произведено 28 выплат величиной $2021. Следовательно, нужно найти x_{28}, зная, что

$$x_n = (1 + 0{,}04)\, x_{n-1} - 2021 \text{ и } x_0 = 40000.$$

Отсюда, долг равен *$18967*.

Приведенный пример является примером ипотеки с фиксированной ставкой.

2. Ипотека с плавающей ставкой

Значительная часть жилищных ипотек в США – это **ипотеки с плавающей ставкой** *(adjustable-rate mortgages, ARM)*. Такие ипотеки позволяют кредитору изменять процентную ставку в течение срока ссуды: в заранее оговоренные моменты и при соблюдении строгих ограничений. По мнению американских экономистов, использование ипотек с плавающей ставкой привело к оживлению жилищного строительства в США в 90-х годах.

Пример 2

Жаник покупает виллу стоимостью 100 000 евро, сделав первый взнос 25000. По договоренности с банком, он должен расплатиться, ежемесячно выплачивая одну и ту же сумму в течение 10 лет, исходя из годовой ставки интереса 12%. Согласно тому же договору, если к началу шестого года годовой уровень инфляция вырастет более чем на 4%, то выплаты за последующие годы будут рассчитаны исходя из годовой ставки интереса 15%.

Определим величину ежемесячных выплат.

Выплаты за первые 5 лет будут вычислены, исходя из условия амортизации 75000 евро за 120 месяцев при ставке интереса 12%.

Уравнение $x_n = (1 + 0,01)\, x_{n-1} - V$, при условии $x_n = 75000$,
приводит к равенству

$$0 = (1 + 0,01)^{120} \cdot 75000 - V\,\frac{1-(1+0,01)^{120}}{1-(1+0,01)},$$

откуда легко получить, что в первые пять лет ежемесячно нужно выплачивать по

$V = 247529/230039 = 1076$ евро.

Эту же сумму нужно будет выплачивать в оставшееся время, если не будет значительного роста инфляции.

В противном случае, величина выплат будет пересмотрена. Для вычисления пересмотренной суммы нужно определить величину долга на момент перерасчета. Для этого достаточно сообразить, что это решение задачи

$$x_n = (1 + 0,01)\, x_{n-1} - 1076;\ x_0 = 75000;\ x_{60} = ?$$

Она равна 48343 евро.

Далее, необходимо еще раз решить задачу об амортизации величины долга:

$$y_n = (1 + 0,0125)\, y_{n-1} - V;\ y_0 = 48343;\ y_{60} = 0.$$

Подставив данные в формулу (3), получим

$$0 = (1 + 0,0125)^{60} \cdot 48343 - V\,\frac{1-(1+0,0125)^{60}}{1-(1+0,01)}.$$

Отсюда следует, что в случае роста инфляции величина выплат вырастет до $V = 1150$.

Изложенная схема позволяет легко рассчитывать величины выплат и в случаях, когда договор предусматривает возможность нескольких пересмотров условий.

3. Ипотека с поправкой на уровень цен

Во многих странах мира, таких как Австралия, Бразилия, Израиль, Канада, Колумбия, Финляндия, Парагвай, Перу, Турция и др., все большее распространение получает финансовый инструмент, называемый **ипотекой с поправкой на уровень цен** *(price-level-adjusted mortgages, PLAM)*. В отличие от ипотеки с фиксированной ставкой, для которой номинальная выплата за период фиксирована, и от ипотеки с плавающей ставкой, для которой номинальная выплата за период фиксирована на определенные промежутки времени, заканчивающиеся, когда уровень цен изменяется настолько существенно, что выплаты должны быть изменены, ипотека PLAM предусматривает постоянство реальной выплаты на протяжении всего срока ипотечного кредита. Это значит, что выплаты за период автоматически подгоняются под изменения уровня цен так, что реальный уровень выплат остается постоянным.

Проблема, возникающая при общепринятой практике предоставления ссуды под закладную с фиксированной номинальной выплатой за период, заключается в том, что многие покупатели – обычно это молодые люди или пары, только начинающие совместную жизнь, которые, как правило, не могут делать высокие реальные выплаты, предусмотренные в самом начале выплат. Это принуждает многих из них копить деньги для более высокой первоначальной выплаты или расстаться с мечтой о покупке собственного жилья.

Преимущества ипотеки с поправкой на уровень цен наиболее очевидны в условиях высокого уровня инфляции. (Описывая ипотеку ARM и ипотеку PLAM, мы следуем книге «Современные деньги и банковское дело», написанную Р.Л. Миллером и Д.Д. Ван-Хузом [5].)

Для того чтобы провести расчеты, связанные с ипотекой PLAM, необходимо рассмотреть более широкий, чем описываемый уравнением (1), класс линейных разностных уравнений. Этим мы сейчас и займемся.

Рассмотрим линейные разностные уравнения 1-го порядка

$$x_n = ax_{n-1} + bc^{n-1}, \tag{5}$$

где x_n – значение исследуемой величины в n-ый период, коэффициенты a, b и c – постоянны.

Перепишем уравнение (5) в виде $x_n - ax_{n-1} = bc^{n-1}$ и разделим на a^n:

$$a^{-n}x_n - a^{-(n-1)}x_{n-1} = bc^{n-1}a^{-n}.$$

Теперь обозначим $a^{-k}x_k$ через y_k и получим, что

$$y_n - y_{n-1} = \frac{b}{a}\cdot\left(\frac{c}{a}\right)^{n-1}. \tag{6}$$

Так как

$$y_n - y_0 = (y_n - y_{n-1}) + (y_{n-1} - y_{n-2}) + \dots + (y_2 - y_1) + (y_1 - y_0),$$

то, в силу уравнения (6), получаем

$$y_n - y_0 = \frac{b}{a}\cdot\left(\frac{c}{a}\right)^{n-1} + \frac{b}{a}\cdot\left(\frac{c}{a}\right)^{n-2} + \dots + \frac{b}{a}\cdot\left(\frac{c}{a}\right) + \frac{b}{a}. \tag{7}$$

Правая часть равенства (7) представляет собой сумму членов геометрической прогрессии.

Поэтому, воспользовавшись формулой для вычисления суммы членов геометрической прогрессии, перепишем формулу (7), прочитав ее справа налево:

$$y_n - y_0 = \frac{b}{a}\cdot\frac{1-(c/a)^n}{1-(c/a)}.$$

Преобразовав знаменатель и вернувшись к исходным обозначениям, получим

$$a^{-n}x_n - x_0 = b\cdot\frac{1-(c/a)^n}{a-c}.$$

Перенесем x_0 в правую часть и умножим уравнение на a^n.

В результате получим формулу:

$$x_n = x_0 a^n + b\frac{a^n - c^n}{a - c}. \qquad (8)$$

Примечание

Формулу (8) можно получить, разделив уравнение (5) на c^n и введя переменные $y_n = x_n/c^n$. Подход, использованный в данной работе, позволяет получить более общую, чем (8), формулу.

Вернемся к ипотеке с поправкой на уровень цен и применим формулу (8) к расчету величины выплат.

Пример 3

Жантемир покупает квартиру стоимостью $40 000, сделав первый взнос 15 000. Далее, по договоренности с банком, он должен расплатиться, делая ежемесячные выплаты в течение 5 лет, исходя из годовой ставки интереса 18%. При этом, с учетом инфляции, оцениваемой в 12% в год, величина выплат должна постоянно увеличиваться на 1% в месяц.

Для того чтобы найти величину 1-ой выплаты, обозначим ее через b и получим уравнение

$$x_n = (1 + 0{,}015)x_{n-1} - b(1 + 0{,}01)^{n-1}.$$

Здесь $0{,}015 = 0{,}18/12$ – ставка интереса за месяц, $0{,}01 = 0{,}12/12$ – ожидаемая величина инфляции за месяц.

Приняв во внимание то, что ипотечный кредит PLAM величиной $25 000 нужно погасить за 5 лет (= 60 месяцев), из формулы (8) получим

$$0 = x_{60} = 25000(1 + 0{,}015)^{60} - b\frac{(1 + 0{,}015)^n - (1 + 0{,}01)^n}{0{,}005}.$$

Отсюда $0 = 2{,}44322 \cdot 25000 - b \cdot 125{,}304$, и поэтому $b = 487{,}46$.

Опираясь на величину 1-ой выплаты, по формуле $b_n = b(1 + 0{,}01)^{n-1}$ несложно определить, сколько требуется выплатить в конце любого месяца. Например, в конце 3-го года, в 36-й месяц, выплата составит $b_{36} = 487{,}46(1 + 0{,}01)^{36-1} = 487{,}46 \cdot 1{,}4166 = 690{,}54$.

При использовании ипотеки PLAM может иметь место парадоксальная ситуация – в какие-то моменты времени величина долга по ипотечному кредиту может превышать величину долга в начальный момент времени. Проиллюстрируем эту ситуацию следующим примером.

Пример 4

Получив большое наследство, Джон Рассудительный решил вложить $120000 на счет под 12% интереса и использовать эти деньги на текущие расходы. В конце 1-го месяца он снял $1000, через месяц $1005, и так далее, снимая в каждый последующий месяц на 0,5% больше. При этом он каждый раз с удовлетворением отмечал, что количество денег на счете увеличивается.

Так, после 1-го изъятия на счете осталось

$$x_1 = (1 + 0{,}01) \cdot 120000 - 1000 = 120200,$$

после 2-го раза

$$x_2 = (1 + 0{,}01) \cdot 120200 - 1000(1 + 0{,}005) = 120397,$$

после 3-го

$$x_3 = (1+0{,}01)\cdot 120397 - 1000(1+0{,}005)^2 = 120591.$$

Через 2,5 года Джон имел на счете \$124456, а через 40 месяцев его душу согрела сумма \$125043.

Через 5 лет, проверив в очередной раз счет, он с удивлением обнаружил, что денег на счете стало меньше – только \$124434. Крайне возмущенный этим событием, Джон устроил скандал в банке, обвинив банковских служащих в нечестности. Понадобилось много времени, нервов и усилий, для того чтобы доказать Джону, что никто, кроме него самого, не снимал денег со счета.

Некоторым утешением для Джона явился понятый им факт: при его режиме трат денег на счете хватит еще на десять с лишним лет.

Количество денег на счете Джона описывается уравнением

$$x_n = (1+0{,}01)x_{n-1} - 1000(1+0{,}005)^{n-1}. \tag{9}$$

Используя начальное значение $x_0 = 120000$ и последовательно подставляя значения, конечно же, можно найти все интересующие значения x_n. Но перспектива десятки раз повторить процесс – не радует. К счастью, уравнение (9) является частным случаем уравнения (5), а его решение находится по формуле (8).

Поэтому

$$x_{30} = 120000(1+0{,}01)^{30} - 1000\frac{(1+0{,}01)^{30} - (1+0{,}005)^{30}}{0{,}005} = \$124456;$$

$$x_{40} = 120000(1+0{,}01)^{40} - 1000\frac{(1+0{,}01)^{40} - (1+0{,}005)^{30}}{0{,}005} = \$125043;$$

$$x_{60} = 120000(1+0{,}01)^{60} - 1000\frac{(1+0{,}01)^{60} - (1+0{,}005)^{60}}{0{,}005} = \$124434.$$

Для того чтобы доказать Джону, что у него нет повода для негодования, можно, вслед за ним и банковскими служащими, провести пошаговые вычисления, но есть более короткий путь.

Рассмотрим x_n как функцию от числа n и найдем его максимум.

Для этого продифференцируем

$$(x_n)' = 120000(1{,}01)^n \cdot \ln 1{,}01 - 1000\frac{(1{,}01)^n \cdot \ln 1{,}01 - (1{,}005)^{n} \cdot \ln 1{,}005}{0{,}005},$$

и приравняем производную к нулю.

Далее, приведя подобные члены и перегруппировав, получим уравнение

$$\left(\frac{1{,}01}{1{,}005}\right)^n = 2{,}5\frac{\ln 1{,}005}{\ln 1{,}01}.$$

Прологарифмировав это уравнение и воспользовавшись научным калькулятором или таблицей логарифмов, получим, что $n = 45{,}568$.

Итак, если бы Джон каждый раз, после снятия денег со счета, интересовался величиной остатка, то он 45 ли 46 раз видел бы, что это число каждый раз увеличивается. Но, к своему разочарованию после этого, он бы заметил, что остаток начал уменьшаться.

Для того чтобы утешить Джона, опять же логарифмируя, можем решить уравнение

$$x_N = 120000(1+0,01)^N - 1000\frac{(1+0,01)^N - (1+0,005)^N}{0,005} = 0.$$

Его решение, $N = 184,63$, показывает, что при указанных условиях Джон может снимать деньги со счета в конце каждого из 184 месяцев.

Примечание

Доходность в ситуациях, рассмотренных в статье, определяется ставкой интереса. Возможны случаи, когда доходность будет определяться ставкой дисконта. К сожалению, из-за того, что соответствующая терминология на русском языке не устоялась, возможны разночтения. В данном случае, говоря о ставке интереса (Rate of Interest), мы имеем в виду ситуацию, когда, взяв $100 при ставке 20%, рассматриваем эти деньги как 100%, и должны вернуть $120. В случае ставки дисконта (Discount Rate) эти же $100 рассматриваются как 80%, и возвращать нужно $25. Поэтому, если речь идет о ставке дисконта, для того чтобы попасть в ситуации, описанные в данной статье, достаточно перейти от этой ставки к ставке интереса по формуле $r = \frac{r_d}{1-r_d}$, где r – ставка интереса, r_d – ставка дисконта.

Литература

1. *Бригхем Ю.* Энциклопедия финансового менеджмента / Пер. с англ – М.: Дело, 1999.
2. *Кыдыралиев С.К., Урдалетова А.Б.* Введение в линейные разностные и дифференциальные уравнения. Уч. пособие. – Бишкек: БГИЭиК, 2000.
3. *Кыдыралиев С.К., Урдалетова А.Б.* Финансовые расчеты и другие приложения в линейных разностных уравнений – Бишкек: АУК, 2002.
4. *Кыдыралиев С.К.* Новый подход к преподаванию финансовых расчетов//Академический вестник АУЦА. – Бишкек, 2005. – № 3. – С. 118–126.
5. *Миллер Р.Л., Ван-Хуз Д.Д.* Современные деньги и банковское дело / Пер. с англ. – М.: ИНФРА-М ,2000.
6. *Brigham E.F., Ehrhardt M.C. Financial* Management. Theory and Practice. South-Western Thomson Learning. 2002.
7. *Cozzens M., Porter R.* Mathematics with Calculus D C Heath and Company, 1987.
8. *Mizrahi A., Sullivan M.* Mathematics for business and social sciences. John Wiley & Sons. USA. 1988.