Э.Т. Мусуралиева,
к.ф.-м.н., ассоц. профессор направления «Естественные науки и информационные технологии», Американский университет в Центральной Азии

О задачах дифференциального исчисления в экономике

Особый интерес представляют задачи дифференциального исчисления в экономике – задачи на нахождение оптимального значения функции одной или нескольких переменных. При решении этих задач возникают такие понятия, как исходные (суммарные) функции $F(x)$, средние $AF(x) = \frac{F(x)}{x}$ и предельные функции $MF(x) = F'(x)$. Эти абстрактные предельные величины могут получить конкретную интерпретацию в экономике как предельные издержки (marginal cost), предельный доход (marginal revenue), предельная полезность (marginal utility), предельная норма замещения (marginal rate of substitution) и т.д. За последние годы увеличилось количество научной и учебной литературы зарубежных авторов. Это дает возможность ознакомиться с новой интерпретацией фундаментальных основ и с новыми приложениями математики в различных науках.

Один из наиболее интересных разделов экономики – это теория полезности. В словаре Дэвида У. Пирса дается следующее определение: «Функция полезности – это функция, устанавливающая, что полезность для индивида зависит от потребляемых им благ и их количества».

Рассмотрим функцию полезности $u=U(x_1,x_2)$. Набор благ (x_1,x_2) может быть в общем случае n-мерным вектором $(x_1,x_2,...x_n)$. Эта функция характеризует полезность данного набора благ для индивида и обладает целым рядом свойств, которые легко объяснить с помощью предельного анализа. Например, предельная полезность $M_1U(x)$ – дополнительная полезность, полученная от дополнительной единицы блага x_1:

$M_1U = \frac{\partial U}{\partial x_1} > 0$, что означает, что увеличение потребления одного из продуктов при постоянном потреблении другого продукта ведет к возрастанию функции полезности. Закон убывания предельной полезности также можно записать в виде

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2} < 0, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial x_2^2} < 0.$$

Рассмотрим следующую задачу.

Задача 1. Асель решила открыть цветочный магазин. Ей надо выбрать одно из трех помещений: первое помещение размером 20 кв. метров, второе – 50 кв. метров и третье – 100 кв. метров. Ежемесячная рента за 1 кв. метр составляет $1. Асель подсчитала, что если она арендует помещение размером S кв. метров и будет продавать по y букетов ежемесячно, то ежемесячные переменные издержки можно записать в виде $C_v(y) = \frac{y^2}{S}$.

А) Найти минимум средних издержек для каждого помещения. Б) Если Асель возьмет в аренду на краткосрочный период помещение площадью 160 кв. метров и если она будет продавать цветы по 3 доллара за букет, сколько букетов цветов ей надо продавать ежемесячно для получения максимальной прибыли?

Решение:

А) Если $S = 20m^2$, то $C_v = \frac{y^2}{20}, TC = 20 + \frac{y^2}{20}, MC = \frac{y}{10}, AC = \frac{20}{y} + \frac{y}{20}$. Минимум средних издержек можно найти из условия $AC = MC$ или $AC' = 0$. Минимум средних издержек равен 2 при $y = 20$. Аналогично при $S = 50m^2$ и $S = 100m^2$ минимум средних издержек равен 2. Построение графиков этих функций даст возможность студентам экономических специальностей в дальнейшем строить графики предельных и средних издержек в долгосрочном периоде (см. рис.1)

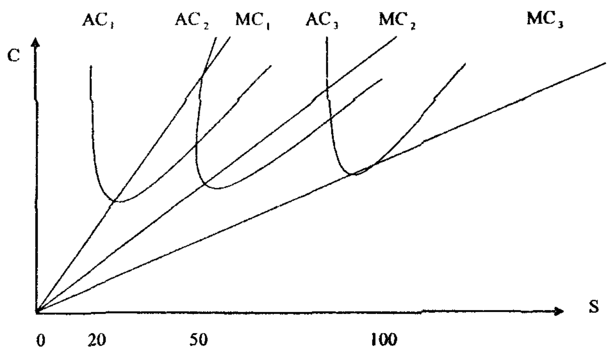


Рис. 1

Б) Общие издержки при аренде помещения размером 160 m^2 имеют вид $TC = 160 + \frac{y^2}{160}$. Прибыль $\pi = R - C = 3y - (160 + \frac{y^2}{160})$. Из условия $\pi' = 0$ или $MC = MR$ находим $y = 240$, т.е. если Асель будет продавать по 240 букетов ежемесячно, то ее прибыль будет максимальной и равна $200 ежемесячно.

В условиях неопределенности функция полезности зависит не только от уровня потребления, но и от вероятностей данных событий. Рассмотрим следующую задачу.

Задача 2. На рынке имеются акции по цене $20. Цены на акции могут подняться на $5 с вероятностью 0,8, а могут понизиться на $10 с вероятностью 0,2. Жаныбек имеет $10000, часть этих денег он потратил на покупку x штук акций по цене $20. Пусть его ожидаемая функция полезности имеет вид $U(C_1, C_2) = 0{,}8 \cdot \ln C_1 + 0{,}2 \cdot \ln C_2$, где C_1, C_2 – потребление при повышении цен на акции и понижении цен соответственно. Сколько акций должен купить Жаныбек?

Решение. При повышении цен на акции потребление $C_1 = 10000 + 5x$, а при понижении цен $C_1 = 10000 - 10x$. Решим задачу линейного программирования

$$U(C_1, C_2) = 0{,}8 \cdot \ln C_1 + 0{,}2 \cdot \ln C_2 \longrightarrow \max$$

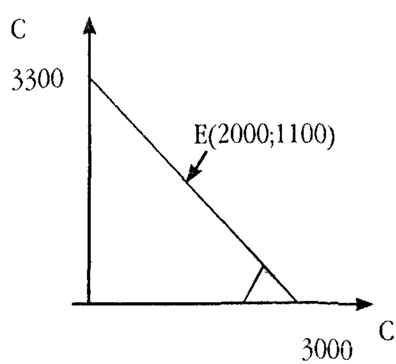
$$2C_1 + C_2) = 30000$$

$$C_1 \geq 0, C_2 \geq 0$$

Поскольку $tg\alpha = -0{,}5$и $MRS=\frac{-0{,}8C_2}{0{,}2C_1}$, то оптимальное потребление (C_1, C_2)= (12000; 6000). Учитывая потребление C_1 = 10000+5x, находим, что Жаныбек должен купить 400 акций.

Примечание. Ожидаемая функция полезности в общем виде записывается следующим образом: $U(C_1, C_2, p_1, p_2) = p_1 f(C_1), + p_2 f(C_2)$, т.е. ожидаемая функция полезности – это есть математическое ожидание полезности. Ожидаемая функция полезности в общем виде в экономической теории называется функцией Неймана-Моргенштерна. Если, в частности, предположить, что $f(x) = \ln(x)$, то функцию Неймана-Моргенштерна можно переписать в виде $F(C_1, C_2) = (C_1^{p1} \cdot C_2^{p2})$. В экономической теории эта функция называется функцией Кобба-Дугласа.

Задача 3. Рассмотрим распределение потребления во времени, т.е. межвременной выбор. Даны два временных периода. C_1 – количество потребляемых товаров в первом периоде, C_2 – количество потребляемых товаров во втором периоде. Предположим, что цена товаров потребления в каждом периоде равна $1. Пусть потребитель в первом периоде имеет доход m_1=$2000, а во втором периоде доход m_2=$1100. Если потребитель будет планировать в каждом периоде свои расходы только с учетом имеющегося дохода, то начальная точка E(2000; 1100) – это соответствующий такому потреблению набор благ. Предположим, что потребитель может давать и брать деньги взаймы по процентной ставке r=10%. Если весь доход за два периода оценить сегодня, то он составит $2000+\frac{1100}{1{,}1}=3000$ долларов. Если весь доход перевести во второй период, то доход равен 1100+1,1·2000=3300 долларов. Наш потребитель находится в начальной точке E и у него есть выбор: либо сегодня (в первом периоде) он может покупать товары на всю имеющуюся у него сумму денег (C_1= $2000), либо он может дать деньги взаймы под 10% годовых, при этом покупать товары на оставшиеся деньги, либо он может взять деньги взаймы под 10% годовых и тратить в первом периоде сумму, значительно превышающую его доход $2000.



См. рис. 2.

Предположим, что функция полезности данного потребителя имеет вид $U(C_1, C_2) = C_1 \cdot C_2$. Предельная норма замещения $MRS=\frac{-C_2}{C_1}$. Решая задачу линейного программирования

$$U(C_1, C_2) = C_1 \cdot C_2 \longrightarrow \text{max}$$

$$C_2 = -1{,}1C_1 + 3300$$

$C_1 \geq 0, C_2 \geq 0$, условие оптимальной точки можно записать в виде $\frac{C_2}{C_1} = 1{,}1$ и находим $C_1 = 1500, C_2 = 1650$.

Исходя из полученных результатов, можно сделать вывод, что данному потребителю для получения максимальной полезности от имеющихся доходов первого и второго периодов рекомендуется в первом периоде использовать только часть своего дохода, а именно \$1500, остальные \$500 надо перевести под проценты во второй период, что позволит ему во втором периоде потреблять товары на сумму в \$1650.

Аналогичный пример можно рассмотреть в трехмерном пространстве.

Задача 4. Пусть m_1, m_2, m_3 – доходы потребителя соответственно в первом, втором и третьем периодах, $m_1 = 1000$, $m_2 = 2000$, $m_3 = 3000$. Предположим, что потребитель может брать и давать взаймы деньги сроком на один период по процентной ставке r=10%. Пусть C_1, C_2, C_3 – количества потребляемых товаров в первом, *втором и третьем периодах соответственно. Цены товаров в каждом периоде по \$1.* (Примечание: можно рассмотреть и случай инфляции, для этого надо скорректировать цены товаров в каждом периоде.)

Предположим, что потребитель хотел бы жить одинаково хорошо во всех трех периодах, т.е. тратить равные суммы денег в каждом периоде $C_1 = C_2 = C_3$. В этом случае задача линейного программирования имеет вид:

$$C_1 = C_2 = C_3 \longrightarrow \max$$

$$C_1 + \frac{C_2}{1{,}1} + \frac{C_3}{1{,}1^2} = 1000 + \frac{2000}{1{,}1} + \frac{3000}{1{,}1^2}$$

$$C_1 \geq 0, C_2 \geq 0, C_3 \geq 0.$$

Решая эту задачу, находим

$$C_1 = C_2 = C_3 \approx 1936{,}55.$$

См. рис. 3.

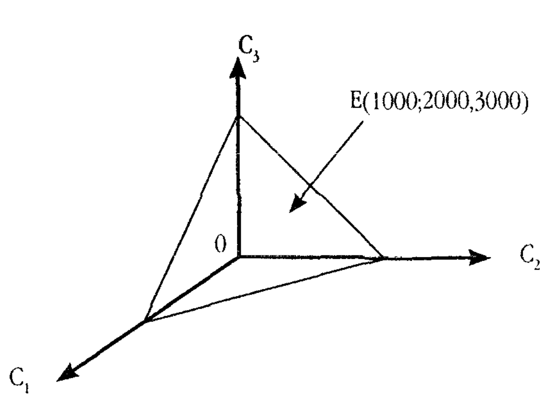


Рис 3

Таким образом, в первом периоде при доходе в $1000 потребитель должен занять $936,55 под 10% годовых, и это позволит ему потреблять товары на общую сумму $1936,55. Если во втором периоде он займет 966,75 долларов, то он сможет потреблять во втором периоде товары на 1936,55 долларов, и остаток на третий период равен $1936,55.

Литература

1. *Лутц Крушвиц.* Финансирование и инвестиции. – СПб.: Питер, 2000
2. Словарь современной экономической теории / Под общ. ред Дэвида У. Пирса. – Москва: ИНФРА-М, 1997.
3. *Chiang, A.,* Fundamental Methods of Mathematical Economics. New York: McGraw-Hill, 1992
4. *Hal R.* Varian- Intermediate Microeconomics. A modern Approach. Third Edition. University of Michigan, 1987.

С.Н. Скляр
профессор, руководитель направления «Естественные науки и информационные технологии»,
Американский университет в Центральной Азии

О.С. Хлыбов
аспирант,
Кыргызско-Российский Славянский университет

Разностные схемы для решения задач теплопереноса в различных системах координат

Введение

Рассмотрим уравнение:

$$\frac{\varepsilon^2}{x^\lambda}\cdot\frac{d}{dx}\left(x^\lambda\frac{du}{dx}\right)-q(x)u=f(x),\quad x\in(0,1); \tag{1}$$

в котором λ и ε параметры, удовлетворяющие условиям: $\lambda \geq 0$, $0 < \varepsilon \leq 1$; функции $q(x)$, $f(x)$ заданы и, по крайней мере, непрерывны на отрезке $[0,1]$, причем: $q(x) \geq 0$. Уравнения вида (1) возникают во многих классических задачах теплопереноса: решая уравнение стационарной теплопроводности

$$\Delta u - qu = f \tag{2}$$

в шаре радиусом r, в случае центральной сферической симметрии, приходим к уравнению (1) с $\lambda = 2$, $\varepsilon = 1/r$. Если уравнение (2) рассматривается в цилиндре с радиусом r и решение обладает свойством осевой симметрии, то получаем уравнение (1) с $\lambda = 1$, $\varepsilon = 1/r$ [5, 7]. При $\lambda = 0$ уравнение (1) используется при моделировании процесса диффузионно-реактивного переноса в декартовой системе координат.