ЛЕНИНГРАДСКИЙ ОРДЕНА ЛЕНИНА И ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ имени А. А. ЖДАНОВА

На правах рукописи

УДК 517.43

КЫДЫРАЛИЕВ Сыргак Капарович

АСИМПТОТИКА СПЕКТРА ВАРИАЦИОННЫХ ЗАДАЧ НА РЕШЕНИЯХ ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

01.01.01 – математический анализ

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Ленинград – 1984

Работа выполнена на кафедре математического анализа математико-механического факультета Ленинградского ордена Ленина и ордена Трудового Красного Знамени государственного университета имени А. А. Жданова.

Научный руководитель — доктор физико-математических наук, профессор **Соломяк М. З.**

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, профессор **Горбачук М. Л.**; кандидат физико-математических наук **Кароль А. И.**

Ведущая организация — Воронежский государственный университет имени Ленинского комсомола.

Защита состоится « __ » __________ 1984 г. в ___ часов

на заседании специализированного совета К. 063.57.29 по присуждению ученой степени кандидата физико-математических наук в Ленинградском государственном университете по адресу: 198904, Ленинград, Петродворец, Библиотечная площадь дом 2.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке имени А. М. Горького Ленинградского государственного университета

Автореферат разослан « __ » ______________ 1984 г.

Ученый секретарь
специализированного совета,
профессор **Ю. А. ДАВЫДОВ**

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

АКТУАЛЬНОСТЬ ТЕМЫ. Асимптотика спектра операторов, заданных отношением двух дифференциальных квадратичных форм, рассматриваемых на некотором пространстве Соболева (т.е. спектра уравнений вида $Bu = \lambda Au$), хорошо известна. Существенно менее полно исследован случай, когда такое отношение рассматривается на подпространстве, выделяемом "дифференциальной связью". В частности, до сих пор не было работ, посвященных случаю, когда эта связь или же квадратичные формы, входящие в отношение, содержат вырождение. Этой актуальной тематике посвящена предлагаемая диссертация.

ЦЕЛЬ РАБОТЫ. Целью работы является получение формул асимптотики спектра для вариационных задач, рассматриваемых на подпространстве, выделяемом дифференциальным уравнением связи, при условии, что квадратичные формы и (или) уравнение связи содержат степенное вырождение на границе области.

МЕТОДИКА ИССЛЕДОВАНИЯ. Доказательства основаны на сведении дифференциальных квадратичных форм в области к формам некоторых псевдодифференциальных операторов на границе. Эта методика для решения спектральных задач без вырождения была разработана М.Ш.Бирманом и М.З.Соломяком. В применении к вырождающимся задачам она потребовала определенных изменений. Основную трудность представило отсутствие, в нужной общности, результатов об ограниченности операторов типа Пуассона в весовых пространствах Соболева.

НАУЧНАЯ НОВИЗНА. Установленные в диссертации результаты являются новыми.

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И ПРАКТИЧЕСКАЯ ЦЕННОСТЬ. Работа носит теоретический характер. Результаты, полученные в диссертации, могут быть использованы для дальнейшего изучения асимптотики спектра вариационных задач со связями, а также при изучении вложений весовых пространств Соболева.

АПРОБАЦИЯ РАБОТЫ. Результаты диссертации докладывались на семинаре по спектральной теории дифференциальных и псевдодифференциальных операторов в Ленинградском университете, а также на конференциях в Фрунзенском политехническом институте (Фрунзе, 1983) и в Киргизском университете (Фрунзе, 1982).

ПУБЛИКАЦИИ. По теме диссертации автором опубликовано три работы.

ОБЪЕМ РАБОТЫ. Диссертация состоит из введения и девяти параграфов и занимает, включая библиографию, 72 страницы машинописного текста. Библиография содержит 44 наименований работ.

СТРУКТУРА РАБОТЫ. Основное содержание диссертации изложено в параграфах I - 9. Им предпосланы введение, а также § 0, в котором собраны основные обозначения и некоторые предварительные сведения, используемые на протяжении всей работы.

В работе изучены две тесно связанные задачи. Различие между ними определяется видом "дифференциальной связи". В первой задаче (ей посвящены § I - 6) связь задается равномерно эллиптическим дифференциальным оператором произвольного порядка, во второй задаче (§ 7 - 9) связь задается эллиптическим оператором второго порядка дивергентного вида, вырождающимся на границе области.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

В диссертации исследуется асимптотика спектра вариационных задач вида

$$B[u]/A[u]\ ,\quad u\in H_0, \qquad (1)$$

где H_0 - подпространство "основного" гильбертова пространства H, выделяемое условием типа $H_0 = \ker L$, а L - некоторый (вообще говоря, неограниченный) оператор в H, $\operatorname{codim} H_0 = +\infty$. Точнее, речь идет об асимптотике спектра оператора T в H_0, такого, что

$$B[u,v] = A[Tu,v],\qquad \forall\, u,v\in H_0.$$

Здесь предполагается, что форма A положительна на H_0, B - вещественна; сами формы могут быть заданы на всем пространстве H.

Более конкретно: форма A имеет вид -

$$A = A_\Omega + A_{\partial\Omega}. \qquad (2)$$

где

$$A_\Omega[u] = \int_\Omega \rho^{2\delta}(y) \sum_{|\alpha_1|+|\alpha_2|\le 2p} a_{\alpha_1\alpha_2}(y)\mathcal{D}^{\alpha_1}u\,\overline{\mathcal{D}^{\alpha_2}u}\,dy, \qquad (3)$$

$$A_{\partial\Omega}[u] = \int_{\partial\Omega} \sum_{|\alpha_1|+|\alpha_2|\le 2p_1} a'_{\alpha_1\alpha_2}(x)\mathcal{D}^{\alpha_1}u\,\overline{\mathcal{D}^{\alpha_2}u}\,dS(x), \qquad (4)$$

Числа p и $2p_1$ - целые, $2\delta > -1$, Ω - ограниченная область в $\mathbb{R}^{m+1}$, $\partial\Omega\in C^\infty$, $y\in\Omega$, $x\in\partial\Omega$, $y=(x,t)$ - координаты в окрестности $\partial\Omega$, ρ - регуляризованное расстояние до $\partial\Omega$; интегрирование в (4) ведется по площади поверхности $\partial\Omega$. Форма B имеет сходный вид с тем отличием, что числа p, p_1, δ заменяются соответственно на q, q_1, σ. Коэффициенты в интегралах, выражающих B_Ω, $B_{\partial\Omega}$, обозначим $b_{\alpha_1\alpha_2}$, $b'_{\alpha_1\alpha_2}$.

Далее для упрощения формулировок предполагается, что

$$p-\delta \geqslant p_1+1/2,\quad q-\sigma \geqslant q_1+1/2. \qquad (5)$$

Смысл условия (5) состоит в том, что слагаемые A_Ω, B_Ω должны давать вклад в главный член асимптотики. Если (5) не выполнено, то эти слагаемые можно отбросить, и мы приходим к задаче без вырождений, изученной М.Ш.Бирманом и М.З.Соломяком.

В качестве H рассматривается естественным образом связанное с формой A весовое пространство Соболева*) - $H^{p,\delta}(\Omega)$. Подпространство $H^{p,\delta}(\Omega, L)$ выделяется "уравнением связи"

$$Lu = 0, \qquad (6)$$

где в § I - 6 L - эллиптический дифференциальный оператор в Ω, а в § 7 - 9 L - вырождающийся оператор дивергентного вида

$$\sum_{0\leq k,j\leq m} \mathcal{D}_{y_k}[\rho^\alpha(y)\, l_{kj}(y)\, \mathcal{D}_{y_j} u] + \rho^\alpha(y)\, l_0(y)\, u. \qquad (7)$$

---

*) Через $H^{p,\delta}(\Omega)$ обозначается класс функций $v \in H^p_{loc}(\Omega)$, для которых конечна норма $\|v\|_{p,\delta}$, где

$$\|v\|^2_{p,\delta} = \int_\Omega \rho^{2\delta}(|\nabla_p v|^2 + |v|^2)\,dy,$$

∇_p - градиент порядка p.

Здесь $0 < \alpha < 1$, $\ell_{kj} = \ell_{jk}$, ℓ_0 - гладкие в $\overline{\Omega}$ вещественные функции,

$$\sum_{0 \le k,j \le m} \ell_{kj}(y)\eta_k \eta_j \geq c|\eta|^2, \quad \forall (y,\eta) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R}^{m+1}.$$

Первая задача(с невырожденным уравнением связи) решается по схеме, разработанной М.Ш.Бирманом и М.З.Соломяком для задач без вырождения. Основную трудность при этом представляет изучение некоторых свойств "граничного оператора" $\gamma: H^{\rho,\delta}(\Omega, L) \to H^{\rho-\delta-1/2}(\partial\Omega)$ для случая $\rho < \delta$.

Более сложной является вторая задача - с вырождающимся уравнением связи. Это обусловлено недостаточностью имеющихся в литературе результатов о регулярности первой краевой задачи для операторов вида (7). Задачам с вырождением эллиптичности посвящено много работ (например, С.Г.Михлина, Л.Д.Кудрявцева, С.М.Никольского, М.И.Вишика и др.), однако полученные в них результаты для случая $0 < \alpha < 1$ оказались для нас недостаточными. Операторы с нецелым порядком вырождения подробно исследовались А.И.Каролем, который ввел для этого специальные весовые классы. На основе развитой им техники в диссертации исследован вопрос о повышении гладкости решений. Отметим, что сам этот вопрос для операторов с нецелым порядком вырождения существенно сложнее, чем для операторов без вырождения, а также с вырождением целого порядка. Дело здесь в том, что уже решения однородного уравнения имеют на границе особенности, и любые теоремы о повышении гладкости обязаны учитывать их характер.

Оба типа задач различаются не только степенью трудности, но и характером результатов: порядок вырождения квадратичных форм A_Ω и B_Ω непосредственно отражается на порядке асимптотики спектра задач, в то время как вырождение оператора связи на асимптотику не влияет, но ограничивает шкалу пространств, на которых может быть поставлена задача.

В § I производится изучение свойств оператора L и связанного с ним пространства $H^{n,\theta}(\Omega,L)$. Особое внимание в этом параграфе уделяется следующим вопросам. Пусть L - правильно эллиптический оператор порядка 2ℓ. Известно, что для $n-\theta>\ell-1/2$ имеют место теорема о следах и теорема о продолжении для пространств $H^{n,\theta}(\Omega)$ или $H^{n-\theta}(\Omega)$ с одной стороны и пространства $H^{n-\theta-1/2}(\partial\Omega)$ с другой. Для случая $n-\theta<\ell-1/2$ (исключая дискретное множество значений $n-\theta$) подобные соотношения установлены для пространств $H^{n-\theta}(\Omega,L)$ и $H^{n-\theta-1/2}(\partial\Omega)$. В диссертации аналогичные результаты получены для пространств $H^{n,\theta}(\Omega,L)$. В § 3 и § 9 проведено сведение квадратичных форм вида A и B на границу для задач с невырожденной и вырождающейся связью соотвественно. Доказано, что при наличии эллиптической связи формы, задаваемые интегралами по области, в главных членах совпадают с формами некоторых псевдодифференциальных операторов (ПДО) на $\partial\Omega$. В частности, форме $A_{\partial\Omega}$ отвечает ПДО порядка $2p-2\sigma-1$. Отметим, что при сведении вырождающихся форм на границу возникает необходимость использовать пространства Соболева с дробными показателями, в то время как в задаче без вырождения достаточно рассматривать пространства Соболева с целыми показателями. Технический аппарат, используемый в § 3 и § 9, разработан в § 2.

В § 4, который носит вспомогательный характер, дано изложение некоторых фактов спектральной теории операторов.

Основные результаты диссертации: теорема об асимптотике спектра отношения форм B/A и теорема, указывающая алгебраическое условие положительности формы A, сформулированы и доказываются в § 5 - 7. В § 5 рассматривается "модельная ситуация": формы A и B заданы интегралами по области, уравнение связи, определяемое правильно эллиптическим скалярным дифференциальным оператором, имеет тривиальное ядро. Обобщению задач, решаемых в § 5, посвящен § 6. Формы A и B представляются линейной комбинацией интегралов по области и его границе, причем в форме A (так же для B) либо форма A_Ω является старшей, либо формы A_Ω, $A_{\partial\Omega}$ равноправны. Уравнение связи задается эллиптическим оператором (системой), от требования правильной эллиптичночти можно отказаться. Изложение в § 6 носит обзорный характер.

В § 7 сформулированы результаты о задаче с вырождающейся связью. Здесь же анонсируется основная для этого случая теорема о гладкости решений первой краевой задачи для вырождающегося на $\partial\Omega$ эллиптического оператора второго порядка, доказательству которой посвящен § 8.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ДИССЕРТАЦИИ.

В формулировках будут фигурировать: конечномерное пространство $F(x,\xi)$ - пространство убывающих при $t \to +\infty$ решений уравнения на $\mathbb{R}_+$

$$L_0(x,\xi,\mathcal{D}_t)f = 0, \tag{8}$$

порождаемого главным символом оператора L ; определенная на $F(x,\xi)$ квадратичная форма:

$$a_{x,\xi} = a^{\Omega}_{x,\xi} + a^{\partial\Omega}_{x,\xi} \cdot \Delta_{\rho_1}^{\rho-\delta}, \tag{9}$$

где

$$a^{\Omega}_{x,\xi}[f]=\sum_{|\alpha_1|+|\alpha_2|=2p} a_{\alpha_1\alpha_2}(x)\int_{\mathbb{R}_+} t^{2\delta}(\xi+\mathcal{D}_t)^{\alpha_1}f(t)(\xi-\mathcal{D}_t)^{\alpha_2}\bar{f}(t)dt,$$

$$a^{\partial\Omega}_{x,\xi}[f]=\sum_{|\alpha_1|+|\alpha_2|=2p_1} a'_{\alpha_1\alpha_2}(x)(\xi+\mathcal{D}_t)^{\alpha_1}f(t)(\xi-\mathcal{D}_t)^{\alpha_2}\overline{f(t)}\Big|_{t=0},$$

$$\Delta^{p-\delta}_{p_1}=\begin{cases} 1, & \text{если } p-\delta=p_1+1/2,\\ 0, & \text{если } p-\delta>p_1+1/2\end{cases}$$

индуцированная формой A ; форма $b_{x,\xi}$, получаемая аналогичным образом из B . Форма A считается "старшей", это требование выражается условием

$$\varkappa \overset{\text{def}}{=} (p-\delta)-(q-\sigma)>0. \tag{10}$$

<u>Первая задача</u>. (Уравнение связи порождается эллиптическим оператором порядка $2l$) .

Первый результат касается пространства $H^{n,\theta}(\Omega,L)$ и не связан с формами A,B . Пусть $\{u\in C^\infty: Lu=0,\ \gamma u=0\}=\{0\}$.

Теорема 1. Для любой функции $u\in H^{n,\theta}(\Omega,L)$ при $n\in\mathbb{Z}_+$ и $\theta>-1/2$ таких, что $n-\theta-l-1/2\neq -1,-2,\dots,$ выполнено соотношение

$$\|u\|_{n,\theta}\asymp\|\gamma u\|_{n-\theta-1/2}.$$

Теорема 2. Пусть для любого $u\in H^{p,\delta}(\Omega,L)$ выполнено условие

$$A[u]\asymp\|u\|^2_{p,\delta}. \tag{11}$$

Тогда при всех $x\in\partial\Omega$, $\xi\in T^*_x(\partial\Omega)\setminus\{0\}$

$$a_{x,\xi}[f]>0,\qquad \forall f\in F(x,\xi)\setminus\{0\}. \tag{12}$$

Обратно, если выполнено условие (I2), то (II) имеет место на некотором подпространстве конечной коразмерности в $H^{p,\delta}(\Omega, L)$.

Теорема 3. Пусть выполнено условие (II). Тогда при $\lambda \to +0$ имеет место асимптотическое равенство:

$$N_{\pm}(\lambda) \sim (2\pi)^{-m} \int\limits_{\partial\Omega} \int\limits_{\xi \in T_x^*(\partial\Omega)} n_{\pm}(\lambda; x, \xi)\, d\xi\, dx =$$

$$= (2\pi)^{-m} \lambda^{-m/2\varkappa} \int\limits_{\partial\Omega} \int\limits_{\xi \in T_x^*(\partial\Omega)} n_{\pm}(1; x, \xi)\, d\xi\, dx.$$

Здесь $n_{\pm}(\lambda; x, \xi)$ - функция распределения положительных и отрицательных собственных чисел конечномерной задачи о спектре отношения $b_{x,\xi}[f]/a_{x,\xi}[f]$, $f \in F(x,\xi)$.

Вторая задача. Уравнение связи задается оператором $L(y, \mathcal{D})$, описываемым формулой (7).

Теорема 4. Оператор

$$\{L(y,\mathcal{D}), \gamma\} : H^{l, \tau+\alpha}(\Omega) \to H^{0,\tau}(\Omega) \times H^{l-\tau-\alpha-1/2}(\partial\Omega)$$

является оператором с индексом, если

$$1/2 < l - \tau - \alpha < 3/2 - \alpha. \qquad \text{(I3)}$$

Из (I0) и (I2) вытекает ограничение

$$1/2 < q - \sigma < p - \delta < 3/2 - \alpha,$$

которое ниже считается выполненным. Теоремы 2, 3 в целом переносятся на рассматриваемый случай. В формулировках возникают упрощения ввиду того, что уравнение связи имеет второй порядок и поэтому $\dim_{1} F(x,\xi) = 1$.

В качестве координатной оси t выбирается направление конормали для оператора L. В этом случае уравнение (8) имеет вид

$$\ell_0^0(x,0)\mathcal{D}_t(t^\alpha \mathcal{D}_t f)+t^\alpha \sum_{1\le k,j\le m} \ell_{kj}^0(x,0)\xi_k\xi_j=0.$$

Тогда пространство $F(x,\xi)$ порождается функцией $\tilde{f}[c(x,\xi)t]$, где $c^2(x,\xi)=\sum\limits_{1\le k,j\le m}\ell^0_{kj}(x,0)\xi_k\xi_j/\ell_0^0(x,0)$, $\tilde{f}(t)=t^{(1-\alpha)/2}K_{(1-\alpha)/2}(t)$, K_μ - функция Макдональда.

Теорема 5. (Аналог теоремы 2)

Пусть для любого $u\in H^{p,\delta}(\Omega,L)$ выполнено условие

$$A[u]\asymp \|u\|^2_{p,\delta}. \tag{14}$$

Тогда при всех $x\in\partial\Omega$, $\xi\in T^*_x(\partial\Omega)\setminus\{0\}$

$$a(x,\xi)>0. \tag{15}$$

Обратно, если выполнено условие (15), то (14) имеет место на некотором подпространстве конечной коразмерности в $H^{p,\delta}(\Omega,L)$. Здесь $a(x,\xi)$, и ниже $b(x,\xi)$ - значения форм $a_{x,\xi}$ $b_{x,\xi}$ вида (9) на функции $\tilde{f}(t)$

Теорема 6. (Аналог теоремы 3)

Пусть выполнено условие (14). Тогда при $\lambda\to+0$ имеет место асимптотическое равенство

$$N_\pm(\lambda)\sim(2\pi)^{-m}\lambda^{-m/2\varkappa}\int\limits_{\partial\Omega}\int\limits_{\mathcal{P}_\pm(x)}d\xi\,dx,$$

$$\mathcal{P}_\pm(x)=\{\xi\in T^*_x(\partial\Omega)\,|\pm b(x,\xi)>c^{2\varkappa}(x,\xi)\,a(x,\xi)\}$$

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю М.З.Соломяку за постоянную поддержку и внимание работе.

Список работ, опубликованных автором
по теме диссертации

1. Кыдыралиев С.К. Об асимптотике спектра вырождающихся вариационных задач с эллиптической связью. - Тезисы докладов конференции по распространению упругих и упругопластических волн, ч.I, Фрунзе, 1983, 22 - 24.
2. Кыдыралиев С.К. Об асимптотике спектра вариационных задач с вырождающейся эллиптической связью. - Вестник Ленингр. ун-та, 1983, № 19, 94 - 97.
3. Кыдыралиев С.К. О гладкости решений вырождающихся эллиптических уравнений. - Деп. в ВИНИТИ, № 4691-83 от 26.08.83, 10 с.